Zur Berechnung von Wandscheiben im Hochbau

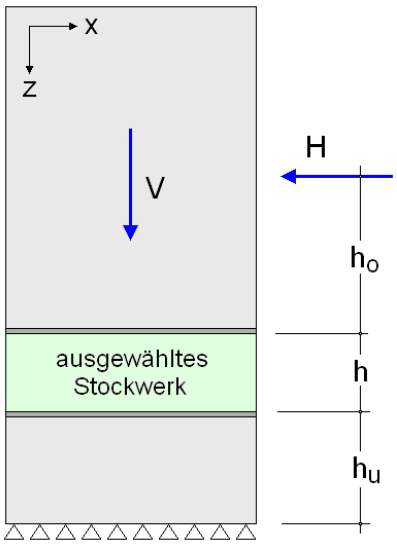
Dr.-Ing. Martin Heller, Dipl.-Math. Thomas Hartmann, pcae-GmbH, Hannover

Inhalt

1 Problemstellung 2
2 Tabellenverfahren 3
2.1 Aufteilung der Wandkräfte 3
2.1.1 Steifigkeiten 3
2.1.1.1 Wandscheiben 3
2.1.1.2 Stahlbauverbände 3
2.1.1.3 Holztafeln 4
2.1.1.4 Federkonstante 5
2.1.2 Allgemeines 6
2.1.3 Widerstand gegen eine Horizontalkraft H_x=1 7
2.1.4 Widerstand gegen eine Horizontalkraft H_y=1 9
2.1.5 Widerstand gegen ein Moment M_z=1 10
2.1.6 Belastung der Wandscheiben 11
2.1.7 Anmerkungen 11
2.2 Aufteilung der Momente 12
2.2.1 Allgemeines 12
2.2.2 Widerstand gegen ein Moment M_x=1 15
2.2.3 Widerstand gegen ein Moment M_y=1 15
2.2.4 Belastungen der Wandscheiben 16
2.2.5 Besonderheiten 17
2.2.5.1 Stahlbauverbände 17
2.2.5.2 Holztafeln 18
2.2.5.3 Pendelstützen 18
2.3 Aufteilung der Vertikalkräfte 19
2.3.1 starre Platte 19
2.3.2 biegeschlaffe Platte 20
2.3.3 elastische Platte 20
3 Matrizenverfahren 21
3.1 Herleitung 21
3.2 Berücksichtigung der Wölbnormalkraft 24
4 Anmerkungen 26
5 Beispiele 27
5.1 Verteilung der Horizontalkräfte bei nicht achsparallel angeordneten Wänden 27
5.2 Verteilung der Vertikalkräfte aus einem Moment 28
5.3 Bildung separater Kerne 30
5.4 U-Profil 31
5.5 Wölbnormalkraft 32
6 Abschließende Bemerkungen 33
7 Literatur 33

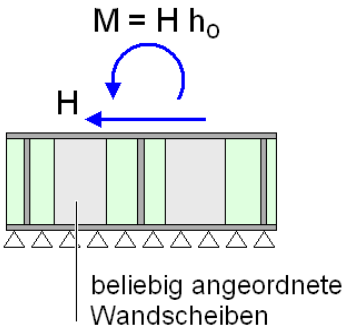
1 Problemstellung

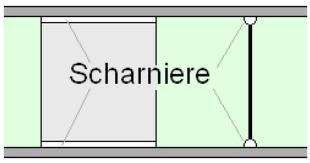
Die Wandscheiben eines Stockwerks sollen für ihre vertikalen und horizontalen Beanspruchungen unter Berücksichtigung der aktuell geltenden Normen bemessen werden. Die Wandscheiben können hierbei bzgl. Lage, Ausrichtung, Größe und Material beliebig angeordnet werden.

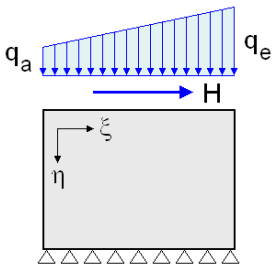


Während die vertikalen Kräfte, die in der Regel aus Eigengewichts- und Nutzlasten resultieren, meist kein größeres Problem bei der Einleitung in die Wandscheiben eines Stockwerks darstellen, fordern die Horizontalkräfte einen höheren Rechenaufwand ein. Horizontalkräfte werden ursächlich von Windeinwirkungen erzeugt, können aber auch aus Bremskräften von Fahrzeugen, Erdbebenlasten oder Ersatzlasten aus anzusetzenden Imperfektionen resultieren.

Nicht nur die resultierende Horizontalkraft H, sondern auch das von ihr erzeugte Moment M muss von den Wandscheiben aufgenommen werden. Hierbei muss die obere Deckenplatte als ideal dehnstarr und hinreichend biegesteif angesehen werden.



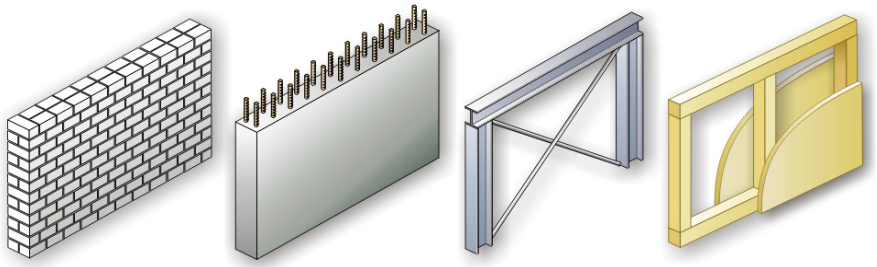




Ziel dieser Arbeit ist, Formeln zu entwickeln und vorzustellen, die die anfallenden Belastungen in eine reine Scheibenbelastung umwandelt. Hierbei wird angenommen, dass die Wandscheiben durch Anordnung gedachter Scharniere an die obere und untere Deckenplatte anschließen, die eine Einleitung von Momenten, die eine erforderliche Biegebemessung zur Folge hätten, unmöglich macht. Wie noch gezeigt wird, handelt es sich hier im Wesentlichen um ein Verteilungsproblem. Prinzipiell wird die zu bemessende Wandscheibe in ihrem lokalen Koordinatensystem aus den gegebenen Lasten eine veränderliche Linienlast, beschrieben durch die Ordinaten q_a und q_e, sowie eine Horizontallast H aufnehmen müssen.

Die Ermittlung dieser Scheibenbelastung aus den äußeren Lasten wird immer gelingen, wenn mindesten drei Wandscheiben angeordnet werden, deren Systemlinien sich in mindestens zwei unterschiedlichen, endlichen Punkten schneiden. Beispiele sinnvoller Anordnungen können der Literatur [1] entnommen werden.

Die Tatsache, dass unterschiedliche Materialien (auch in Kombination) berücksichtigt werden sollen, zeigt an, dass den Steifigkeiten besondere Aufmerksamkeit zukommt. Als grundsätzlich unterschiedliche Systeme sollen Mauerwerk, Stahlbetonwände, Stahlbauverbände und Holztafeln in die Untersuchung mit einfließen.



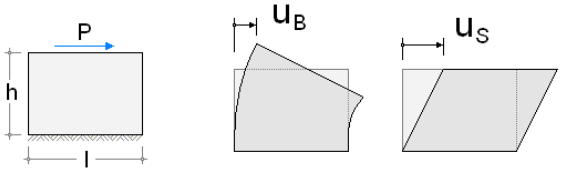
2 Tabellenverfahren

2.1 Aufteilung der Wandkräfte

2.1.1 Steifigkeiten

2.1.1.1 Wandscheiben

Wird eine am unteren Rand gelagerte Wandscheibe der Länge l, der Breite b und der Höhe h am oberen Rand mit einer horizontalen Last P in Scheibenrichtung belastet, so stellt sich eine Verformung ein, deren Größenordnung in guter Näherung mit Hilfe stabtheoretischer Betrachtungen abgeschätzt werden kann.



Es ergibt sich ein Biegeanteil zu

$$u_B = \frac{Ph^3}{3EI} \qquad \text{mit} \quad E = \text{Elastizitätsmodul und} \quad I = \frac{l^3 b}{12}$$

und ein Schubanteil zu

$$u_S = \frac{Ph}{GA} \qquad \text{mit} \quad G = \text{Gleitmodul und} \quad A = l\,b$$

Ist h sehr viel größer als l, so reicht zur Abschätzung der Verformungen der Biegeanteil aus, da er einen deutlich größeren Betrag liefert als der Schubanteil. Ist jedoch l deutlich größer als h, so drehen sich die Verhältnisse um: der Schubanteil ist deutlich größer als der Biegeanteil. Für l=h haben beide Anteile in etwa die gleiche Größenordnung. Die Gesamtverformung

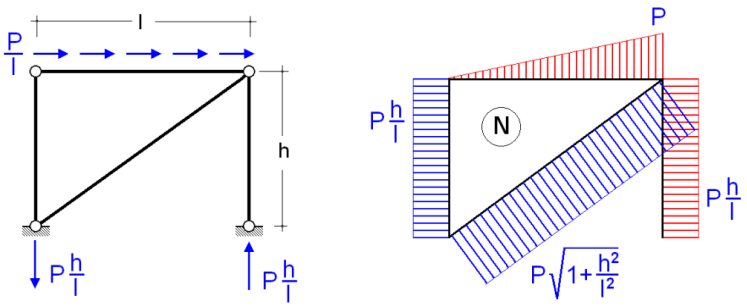
$$u_{gesamt} = u_B + u_S$$

liefert im Vergleich zur Scheibentheorie in allen betrachteten geometrischen Variationen sehr gute Ergebnisse, was sehr einfach mit einem FE-Scheibenprogramm überprüft werden kann. Es wird aus diesem Grunde die Berücksichtigung beider Anteile empfohlen.

Abhandlungen in der Fachliteratur kann entnommen werden, dass im Stahlbetonbau in der Regel auf den Schubanteil verzichtet wird (vgl. [1]). Aus diesem Grunde sollte ein Programm eine optionale Auswahl anbieten.

2.1.1.2 Stahlbauverbände

Die bisherigen Betrachtungen betrafen Stahlbeton und Mauerwerk. Für Stahlbauverbände gilt folgende Skizze, der auch der zugehörige Normalkraftverlauf entnommen werden kann:



Die Anwendung des Arbeitsintegrals für Normalkräfte integriert über die Länge der mit Normalkraft behafteten Traggliedern liefert die horizontale Verschiebung des Riegels

$$u = \int \overline{N_D} \frac{N_D}{E_D A_D}\, dx + 2\int \overline{N_S} \frac{N_S}{E_S A_S}\, dx + \int \overline{N_R} \frac{N_R}{E_R A_R}\, dx$$

$$u = \frac{P}{E_D A_D}\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right)\sqrt{l^2+h^2} + \frac{2Ph^3}{E_S A_S l^2} + \frac{Pl}{2E_R A_R}$$

mit $E_D A_D$ = Dehnsteifigkeit des Diagonalstabes
und $E_S A_S$ = Dehnsteifigkeit des Stiels
und $E_R A_R$ = Dehnsteifigkeit des Riegels

2.1.1.3 Holztafeln

Da die Kraft P in die Rippen und Gurte eingeleitet wird und von da aus über die Verbindungsmittel in die Beplankung gelenkt wird, besteht die Verschiebung *u* aus mehreren Anteilen. Nach [3] ist zu berücksichtigen:

Aus der Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel:

$$u_K = (2l + 2h)\frac{a_v}{K_{ser} l^2} P$$

Aus der Schubbeanspruchung der Beplankung:

$$u_G = \frac{h}{G_P t_P l} P$$

Aus der Normalkraftbeanspruchung der Randrippen:

$$u_E = \frac{2}{3E_R A_R}\left(l + \frac{h^3}{l^2}\right) P$$

Aus der Querdruckpressung der Randrippe auf Untergurt:

$$u_v = v_{90} \frac{h}{1,2\, l\, k_{c,90} f_{c,90,k} k_{\text{mod}} A_R} P$$

mit:

a_v	Abstand der Verbindungsmittel
K_{ser}	Verschiebungsmodul des Verbindungsmittels
G_P	Gleitmodul der Beplankung
t_P	Beplankungsdicke
E_R	Elastizitätsmodul der Randrippe
A_R	Querschnittsfläche der Randrippe
v_{90}	=1mm (bei voller Auslastung der Kontaktfläche)
$k_{c,90}$	Querdruckbeiwert nach DIN 1052:2008-12
$f_{c,90,k}$	charakteristische Festigkeit senkrecht zur Faser bei Druck
k_{mod}	Modifikationsbeiwert nach DIN 1052:2008-12

Insgesamt ergibt sich

$$u_{gesamt} = u_K + u_G + u_E + u_V$$

2.1.1.4 Federkonstante

In den nachfolgenden Abhandlungen wird die Federsteifigkeit C benötigt, die in Analogie zum Hooke'schen Gesetz durch

$$P = C\,u$$

festgelegt ist. Sie berechnet sich zu

$$C = \frac{P}{u}$$

Für Stahlbetonwände und Mauerwerk ergibt sich

$$C = \frac{1}{\frac{h^3}{3EI} + \frac{h}{GA}} \qquad \text{(Biegeanteil und Schubanteil)}$$

$$C = \frac{3EI}{h^3} \qquad \text{(nur Biegeanteil)}$$

$$C = \frac{GA}{h} \qquad \text{(nur Schubanteil)}$$

und für Stahlbauverbände

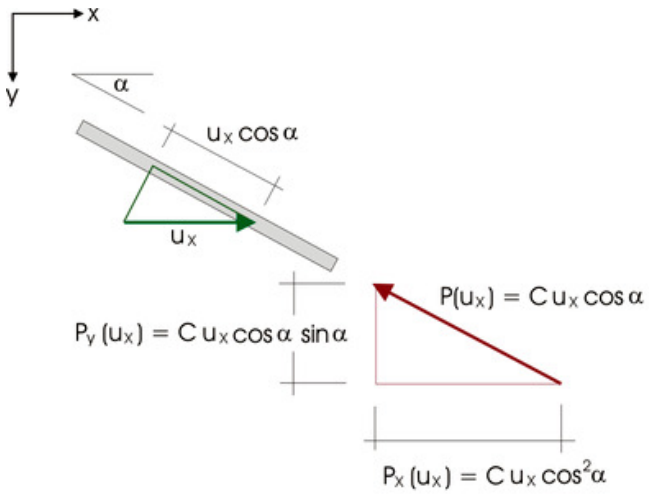
$$C = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{E_D A_D}\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right)\sqrt{l^2+h^2}}_{\text{aus Diagonale}} + \underbrace{\frac{2h^3}{E_S A_S l^2}}_{\text{aus Stiele}} + \underbrace{\frac{l}{2E_R A_R}}_{\text{aus Riegel}}}$$

und für Holztafeln

$$C = \frac{1}{\underbrace{(2l+2h)\frac{a_v}{K_{ser}l^2}}_{aus\ u_K} + \underbrace{\frac{h}{G_P t_P l}}_{aus\ u_G} + \underbrace{\frac{2}{3E_R A_R}\left(l+\frac{h^3}{l^2}\right)}_{aus\ u_E} + \underbrace{v_{90}\frac{h}{1,2\,l\,k_{c,90}f_{c,90,k}k_{\mathrm{mod}}A_R}}_{aus\ u_V}}$$

2.1.2 Allgemeines

Wird die obere Deckenplatte um ein Maß u_x in x-Richtung verschoben, so wird der Kopf einer aussteifenden Wandscheibe, die um den Winkel α entsprechend der nachfolgend dargestellten Skizze verdreht angeordnet ist, entsprechend verformt.



Grundriss

Der Verformungsanteil senkrecht zur Wandscheibe kann von der Wandscheibe nicht aufgenommen werden. Allein der Anteil

$u_x \cos\alpha$

wird die Reaktionskraft

$$P(u_x) = C\,u_x \cos\alpha \qquad (1)$$

in der Scheibe hervorrufen. Diese lässt sich in die Horizontal- und Vertikalkomponente aufteilen:

$$P_x(u_x) = C\,u_x \cos^2\alpha \qquad (2)$$

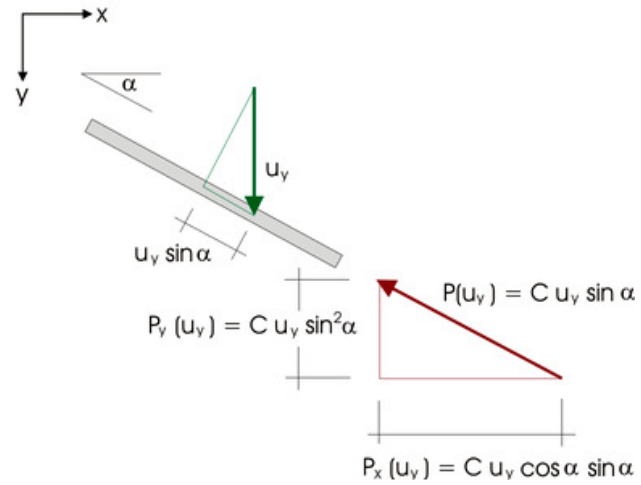
$$P_y(u_x) = C\,u_x \cos\alpha \sin\alpha \qquad (3)$$

Da dies für alle aussteifenden Wände gilt, wird die erzwungene Verformung u_x im Grundriss die resultierende Horizontalkraft H_x und die Vertikalkraft H_y zur Folge haben.

$$H_x(u_x) = \sum P_x(u_x) = u_x \sum_{(i)} C_i \cos^2\alpha_i \qquad (4)$$

$$H_y(u_x) = \sum P_y(u_x) = u_x \sum_{(i)} C_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i \qquad (5)$$

Entsprechendes gilt sinngemäß für eine Verschiebung der oberen Deckenplatte in y-Richtung. Die geometrischen Zusammenhänge können der nachfolgenden Skizze entnommen werden.



$$P(u_y) = C\,u_y \sin\alpha \tag{6}$$

$$P_x(u_y) = C\,u_y \cos\alpha \sin\alpha \tag{7}$$

$$P_y(u_y) = C\,u_y \sin^2\alpha \tag{8}$$

$$H_y(u_y) = \sum P_y(u_y) = u_y \sum_{(i)} C_i \sin^2\alpha_i \tag{9}$$

$$H_x(u_y) = \sum P_x(u_y) = u_y \sum_{(i)} C_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i \tag{10}$$

2.1.3 Widerstand gegen eine Horizontalkraft H_x=1

Sollen sich bei einer ansonsten beliebigen Translation der Deckenplatte die vertikalen Reaktionskräfte zu 0 ergeben, so muss

$$H_y(u_x) + H_y(u_y) = 0$$

gelten, woraus folgt:

$$u_x \sum_{(i)} C_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i = -u_y \sum_{(i)} C_i \sin^2\alpha_i$$

$$u_y = \frac{-\sum_{(i)} C_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i}{\sum_{(i)} C_i \sin^2\alpha_i} u_x \tag{11}$$

Die resultierende horizontale Gesamtkraft aus den Scheibenreaktionskräften lautet sodann unter Zuhilfenahme von *(4)*, *(10)* und *(11)*:

$$H_x = H_x(u_x) + H_x(u_y) = u_x \left(\sum_{(i)} C_i \cos^2 \alpha_i - \frac{\left(\sum_{(i)} C_i \cos \alpha_i \sin \alpha_i \right)^2}{\sum_{(i)} C_i \sin^2 \alpha_i} \right) \qquad (12)$$

Soll sich die resultierende horizontale Gesamtkraft zu 1.0 ergeben, so muss

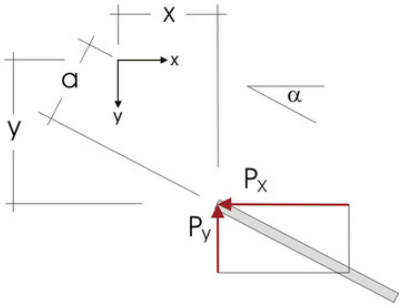
$$u_x = \frac{1}{\sum_{(i)} C_i \cos^2 \alpha_i - \frac{\left(\sum_{(i)} C_i \cos \alpha_i \sin \alpha_i \right)^2}{\sum_{(i)} C_i \sin^2 \alpha_i}} \qquad (13)$$

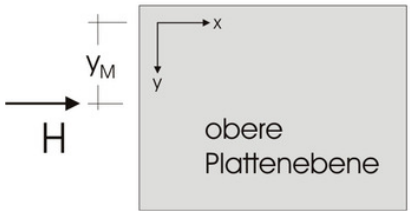
gelten. Die Kraft in der Wandscheibe *i* infolge einer horizontalen Einheitslast, die allein eine Translation in der Deckenplatte bewirkt, kann folglich mit *(1)* und *(6)* berechnet werden

$$P_i = P_i(u_x) + P_i(u_y) = C_i u_x \cos \alpha_i + C_i u_y \sin \alpha_i \qquad (14)$$

wobei zuvor u_x mit *(13)* und sodann u_y mit *(11)* festzulegen sind.

Damit die Deckenplatte eine reine Translation (ohne Rotationsanteil) durchführt, muss die äußere Kraft H im Momentengleichgewicht mit den von ihr geweckten Wandkräften stehen.





Der o. a. Skizze (links) kann entnommen werden, dass die Kraft P der Wandscheibe im Allgemeinen mit dem Moment

$$M = a\,P = P_x y - P_y x = Py \cos \alpha - Px \sin \alpha$$

um den Koordinatenursprung dreht. Um Momentengleichgewicht zu gewährleisten, muss entsprechend der Skizze (rechts) somit

$$H\ y_M = \sum_{(i)} P_i y_i \cos \alpha - P_i x_i \sin \alpha \qquad \text{sein.}$$

Da H den Wert 1 hat, gilt unmittelbar

$$y_M = \sum_{(i)} P_i y_i \cos \alpha - P_i x_i \sin \alpha \qquad (15)$$

y_M vermaßt hierbei den sogenannten Schubmittelpunkt.

2.1.4 Widerstand gegen eine Horizontalkraft H_y=1

Die Herleitung für eine vertikale Einheitslast läuft analog zu den bisherigen Formeln:

Die Forderung

$$H_x(u_x)+H_x(u_y)=0$$

liefert

$$u_x=\frac{-\sum_{(i)} C_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i}{\sum_{(i)} C_i\cos^2\alpha_i}u_y \qquad (16)$$

sodass sich die resultierende vertikale Kraft zu

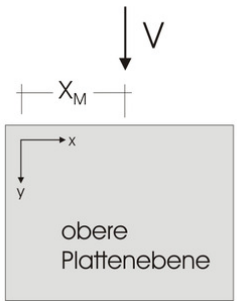
$$H_y=H_y(u_y)+H_y(u_x)=u_y\left(\sum_{(i)} C_i\sin^2\alpha_i-\frac{\left(\sum_{(i)} C_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i\right)^2}{\sum_{(i)} C_i\cos^2\alpha_i}\right)$$

ergibt und die Forderung $H_y=1$ letztlich

$$u_y=\frac{1}{\sum_{(i)} C_i\sin^2\alpha_i-\frac{\left(\sum_{(i)} C_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i\right)^2}{\sum_{(i)} C_i\cos^2\alpha_i}} \qquad (17)$$

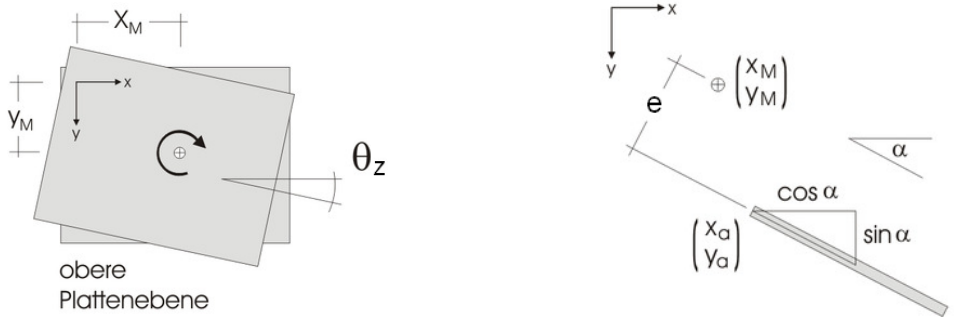
liefert. Werden die Verformungen mit (17) und (16) ermittelt, so können die horizontalen Scheibenkräfte infolge einer Belastung in y-Richtung der Größe 1 direkt mit Hilfe von (14) berechnet werden. Zur Gewährleistung des Momentengleichgewichtes muss die vertikale Kraft im Abstand x_M vom Koordinatenursprung wirken:

$$x_M=\sum_{(i)} P_i x_i\sin\alpha-P_i y_i\cos\alpha \qquad (18)$$



2.1.5 Widerstand gegen ein Moment M_z=1

Zum allgemeinen Verformungszustand gehört auch eine Verdrehung der oberen Deckenplatte um den Schubmittelpunkt.



Angenommen wird eine kleine Verdrehung θ_z wie in der Skizze links angegeben. Da die Verdrehung um den Schubmittelpunkt durchgeführt wird, ist der Abstand *e* der Scheibenachse vom Schubmittelpunkt von Interesse. Mit Hilfe der Vektorrechnung ergibt sich

$$e = \left| \left(\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right|$$

$$e = (x_a - x_M)\sin\alpha - (y_a - y_M)\cos\alpha \qquad (19)$$

Die für die betrachtete Wandscheibe relevante Verschiebung lautet

$$\Delta u = e\,\theta_z$$

die die Scheibenkraft

$$P = C\,\Delta u = C\,e\,\theta_z \qquad (20)$$

hervorruft. Unter Berücksichtigung aller Wandscheiben ergibt sich ein Gesamtmoment von

$$M_z = \sum_{(i)} P_i a_i = \theta_z \sum C_i\, e_i^2$$

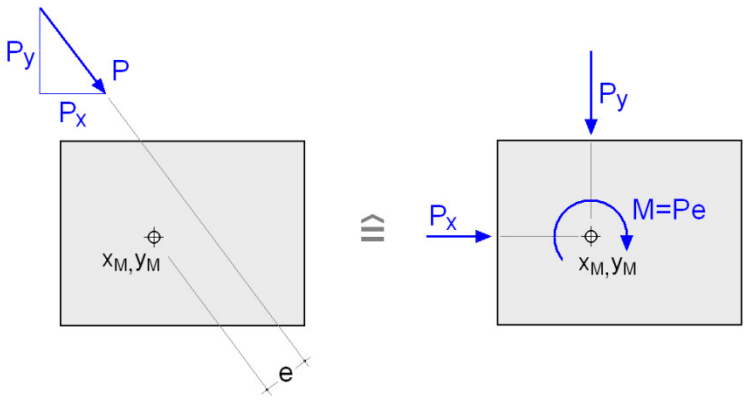
Wird $M_z = 1$, so erhält man

$$\theta_z = \frac{1}{\sum_i C_i\, e_i^2} \qquad (21)$$

Da nun mit (21) der Drehwinkel θ_z bekannt ist, können die Scheibenkräfte infolge eines Einheitsmomentes um den Schubmittelpunkt mit Hilfe von (20) berechnet werden.

2.1.6 Belastung der Wandscheiben

Die Auswirkungen einer beliebigen Kraft P, die an beliebiger Stelle an der Deckenplatte angreift, können direkt durch Superposition berechnet werden.



Es ergeben sich zunächst die Verformungen unter Zuhilfenahme von *(13), (16)* - *(11),(17)* - und *(21)*

$$u_x = P_x\, u_x(H_x = 1) + P_y\, u_x(H_y = 1)$$
$$u_y = P_x\, u_y(H_x = 1) + P_y\, u_y(H_y = 1)$$
$$\theta_z = M\, \theta_z(M_z = 1)$$

Hieraus lassen sich die einzelnen horizontalen Wandscheibenbelastungen direkt berechnen.

$$P_i = C_i \left(u_x \cos\alpha_i + u_y \sin\alpha_i + \theta_z \left((x_{ai} - x_M) \sin\alpha_i - (y_{ai} - y_M) \cos\alpha_i \right) \right)$$

2.1.7 Anmerkungen

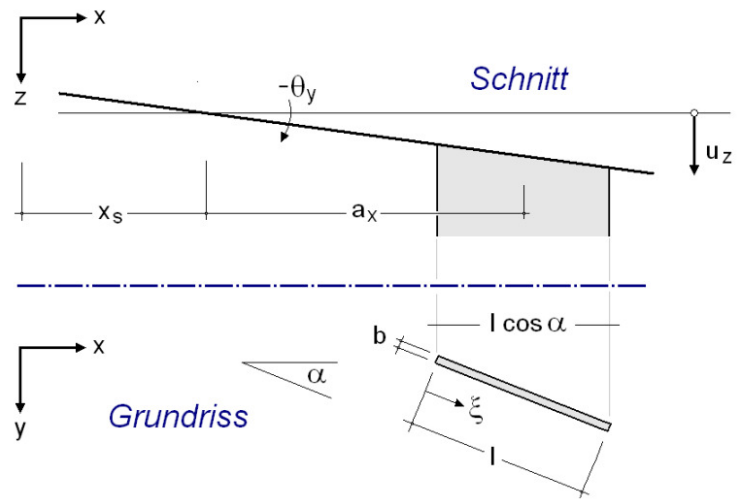
Im Sonderfall, in dem nur achsparallele Wandscheiben definiert sind, vereinfachen sich die Formeln erheblich. Es gilt dann

für horizontale Wände: $\cos\alpha = 1, \quad \sin\alpha = 0$
für vertikale Wände: $\cos\alpha = 0, \quad \sin\alpha = 1$

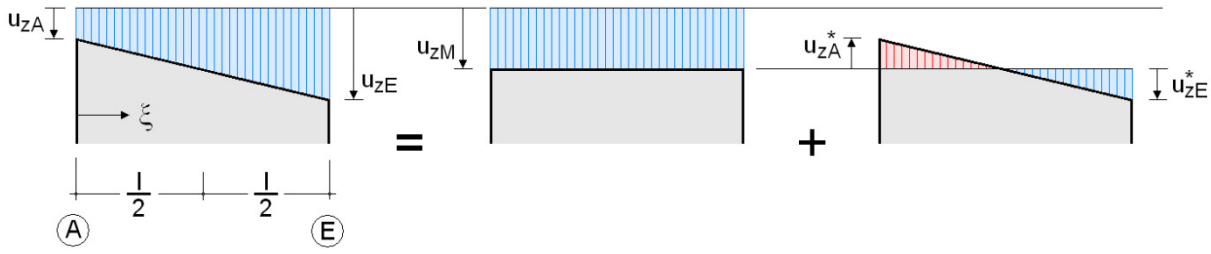
Da der Term $\sum_i C_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i$ hierbei stets 0 ist, entkoppeln sich die horizontalen und vertikalen Kräfte und die Verformung erfolgt stets in Kraftrichtung. Die Gleichungen gehen dann über in die Form, wie sie in [1] und [2] dargestellt werden.

2.2 Aufteilung der Momente

2.2.1 Allgemeines



Wird eine als unendlich steif angenommene Deckenplatte um eine um x_s verschobene y-Achse mit dem hinreichend kleinen Winkel $-\theta_y$ verdreht, so erleiden die stützenden Scheiben eine Verformung in z-Richtung.



Den beiden vorangegangenen Skizzen kann entnommen werden, dass

$$u_{zM} = -\theta_y a_x$$

$$u_{zA} = -\theta_y \left(a_x - \frac{l}{2}\cos\alpha \right) \qquad u^*_{zA} = u_{zA} - u_{zM} \quad \Rightarrow \quad u^*_{zA} = \theta_y \frac{l}{2}\cos\alpha$$

$$u_{zE} = -\theta_y \left(a_x + \frac{l}{2}\cos\alpha \right) \qquad u^*_{zE} = u_{zE} - u_{zM} \quad \Rightarrow \quad u^*_{zE} = -\theta_y \frac{l}{2}\cos\alpha$$

gilt. Hieraus ergeben sich die Dehnungen

$$\varepsilon_{zM} = \frac{\theta_y a_x}{h} \qquad \varepsilon^*_{zA} = \frac{-\theta_y l}{2h}\cos\alpha \qquad \varepsilon^*_{zE} = \frac{\theta_y l}{2h}\cos\alpha$$

und mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes die Spannungen

$$\sigma_{zM} = \frac{\theta_y E a_x}{h} \qquad \sigma^*_{zA} = \frac{-\theta_y E l}{2h}\cos\alpha \qquad \sigma^*_{zE} = \frac{\theta_y E l}{2h}\cos\alpha$$

Aus dem konstanten Spannungsanteil σ_{zM} lässt sich die resultierende Normalkraft

$$N = \sigma_{zM} A = \frac{\theta_y E A a_x}{h} \quad (A = lb)$$

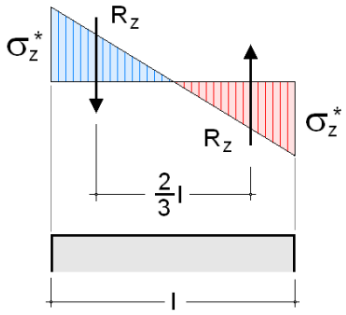
und mit dem Hebelarm a_x das Moment um die Spannungsnulllinie

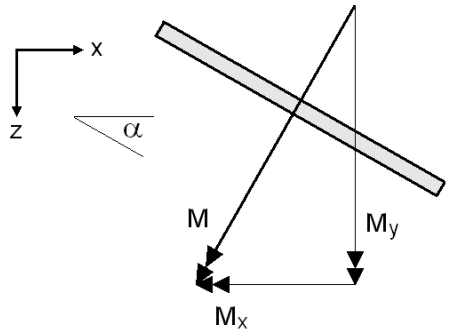
$$M_y^S = a_x N = \frac{\theta_y E A a_x^2}{h}$$

bestimmen. Hierbei handelt es sich um den Steiner'schen Anteil am Gesamtmoment.

Die Normalkraft N erzeugt auch ein Moment M_x^S um eine parallel zur X-Achse verlaufenden Achse

$$M_x^S = a_y N = \frac{-\theta_y E A a_x a_y}{h}$$





Entsprechend der o. a. Skizze (links) ist

$$R_z = \frac{lb}{4}\sigma_z^*$$

und das daraus gebildete Moment

$$M^0 = \frac{2}{3} l R_z = \frac{l^2 b}{6}\sigma_z^* = \frac{\theta_y E l^3 b}{12h}\cos\alpha = \frac{\theta_y}{h} EI \cos\alpha$$

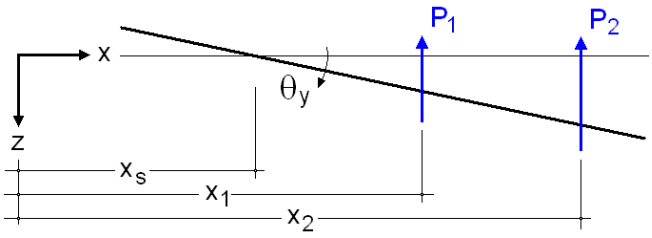
Hierin ist *I* das Eigenträgheitsmoment der Wandscheibe. Wegen der Schiefwinkeligkeit der betrachteten Wandscheibe ist dieses Moment aufzuteilen in

$$M_y^0 = M^0 \cos\alpha \quad \text{und} \quad M_x^0 = M^0 \sin\alpha \ .$$

Mit $M_y = M_y^0 + M_y^S$ und Summation aller beteiligten Scheiben ergibt sich letztendlich

$$M_y(\theta_y) = \frac{\theta_y}{h} \sum_{(i)} E_i \left(I_i \cos^2\alpha_i + A_i a_{xi}^2 \right) \qquad (22)$$

$$M_x(\theta_y) = \frac{-\theta_y}{h} \sum_{(i)} E_i \left(I_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i + A_i a_{xi} a_{yi} \right) \qquad (23)$$



Der Steiner‘sche Anteil der Wandscheibe i liefert eine vertikale Kraft

$$P_i = -\theta_y \left(x_i - x_s \right) \frac{EA}{h}$$

Wenn die Summe der vertikalen Kräfte verschwinden soll, so muss gelten

$$\sum_i P_i = \frac{-\theta_y}{h} \sum_{(i)} E_i A_i \left(x_i - x_s \right) = 0$$

Daraus folgt

$$\sum_{(i)} E_i A_i x_i - x_s \sum_{(i)} E_i A_i = 0$$

und letztlich

$$x_s = \frac{\sum_{(i)} E_i A_i x_i}{\sum_{(i)} E_i A_i} \qquad (24)$$

Womit sich die bisher noch willkürlich angenommene Größe

$$a_{xi} = x_i - x_s$$

ergibt. Ist der E-Modul für alle Wandscheiben konstant, so wird mit x_s der Flächenschwerpunkt der Wandscheiben im Grundriss vermaßt.

Wird eine als unendlich steif angenommene Deckenplatte um eine um y_s verschobene x-Achse mit dem hinreichend kleinen Winkel $-\theta_x$ verdreht, so ergibt sich auf vollkommen analogem Wege

$$M_x \left(\theta_x \right) = \frac{\theta_x}{h} \sum_{(i)} E_i \left(I_i \sin^2 a_i + A_i a_{yi}^2 \right) \qquad (25)$$

$$M_y \left(\theta_x \right) = \frac{-\theta_x}{h} \sum_{(i)} E_i \left(I_i \cos \alpha_i \sin \alpha_i + A_i a_{xi} a_{yi} \right) \qquad (26)$$

und

$$y_s = \frac{\sum_{(i)} E_i A_i y_i}{\sum_{(i)} E_i A_i} \quad \rightarrow \quad a_{yi} = y_i - y_s \qquad (27)$$

2.2.2 Widerstand gegen ein Moment M_x=1

Soll sich nun bei einer ansonsten beliebigen Verdrehung der Deckenplatte das Moment M_y zu Null ergeben, so muss gelten

$$M_y(\theta_y)+M_y(\theta_x) \quad = \quad \frac{\theta_y}{h}\sum_{(i)}E_i\left(I_i\cos^2\alpha_i+A_ia_{xi}^2\right)-\frac{\theta_x}{h}\sum_{(i)}E_i\left(I_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i+A_ia_{xi}a_{yi}\right) \quad = \quad 0$$

Daraus folgt

$$\theta_y=\theta_x\frac{\sum_{(i)}E_i\left(I_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i+A_ia_{xi}a_{yi}\right)}{\sum_{(i)}E_i\left(I_i\cos^2\alpha_i+A_ia_{xi}^2\right)} \qquad (28)$$

Hiermit lässt sich auch unter Zuhilfenahme von *(23)* und *(25)* das Moment M_x formulieren

$$M_x=\frac{-\theta_x}{h}\left(\sum_{(i)}E_i\left(I_i\sin^2\alpha_i+A_ia_{yi}^2\right)-\frac{\left(\sum_{(i)}\left(E_iI_i\cos\alpha\sin\alpha+A_ia_{xi}a_{yi}\right)\right)^2}{\sum_{(i)}E_i\left(I_i\cos^2\alpha+A_ia_{xi}^2\right)}\right)$$

Umgestellt nach θ_x ergibt sich

$$\theta_x=\frac{-h}{\sum_{(i)}E_i\left(I_i\sin^2\alpha_i+A_ia_{yi}^2\right)-\frac{\left(\sum_{(i)}\left(E_iI_i\cos\alpha\sin\alpha+A_ia_{xi}a_{yi}\right)\right)^2}{\sum_{(i)}E_i\left(I_i\cos^2\alpha+A_ia_{xi}^2\right)}}M_x \qquad (29)$$

Soll ein äußeres Moment $\overline{M}_x$ vom System aufgenommen werden, so wird sich die Plattenschiefstellung θ_x gemäß *(29)* und θ_y gemäß *(28)* einstellen. Mit Hilfe der Plattenschiefstellungen können die Belastungen der einzelnen Wandscheiben durch das Moment $\overline{M}_x$ direkt angegeben werden.

2.2.3 Widerstand gegen ein Moment M_y=1

Soll sich bei einer ansonsten beliebigen Verdrehung der Deckenplatte das Moment M_x zu Null ergeben, so muss gelten

$$M_x(\theta_x)+M_x(\theta_y) \quad = \quad \frac{\theta_x}{h}\sum_{(i)}E_i\left(I_i\sin^2\alpha_i+A_ia_{xi}^2\right)-\frac{\theta_y}{h}\sum_{(i)}E_i\left(I_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i+A_ia_{xi}a_{yi}\right) \quad = \quad 0$$

Daraus folgt

$$\theta_x = \theta_y \frac{\sum_{(i)} E_i \left(I_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i + A_i a_{xi} a_{yi} \right)}{\sum_{(i)} E_i \left(I_i \sin^2 \alpha_i + A_i a_{xi}^2 \right)} \qquad (30)$$

und

$$\theta_y = \frac{-h}{\sum_{(i)} E_i \left(I_i \cos^2 \alpha_i + A_i a_{yi}^2 \right) - \frac{\left(\sum_{(i)} \left(E_i I_i \cos\alpha \sin\alpha + A_i a_{xi} a_{yi} \right) \right)^2}{\sum_{(i)} E_i \left(I_i \sin^2 \alpha + A_i a_{xi}^2 \right)}} M_y \qquad (31)$$

Soll ein äußeres Moment $\overline{M}_y$ vom System aufgenommen werden, so wird sich die Plattenschiefstellung θ_y gemäß *(31)* und θ_x einstellen. Mit Hilfe der Plattenschiefstellungen können die Belastungen der einzelnen Wandscheiben durch das Moment $\overline{M}_y$ direkt angegeben werden.

2.2.4 Belastungen der Wandscheiben

Unter Absatz 3.1 wurden die Spannungen in der Wandscheibe infolge einer Plattenschiefstellung θ_y formuliert.

$$\sigma_{zM} = \frac{\theta_y E a_x}{h} \quad \sigma^*_{zA} = \frac{-\theta_y El}{2h} \cos\alpha \qquad \sigma^*_{zE} = \frac{\theta_y El}{2h} \cos\alpha$$

Entsprechendes gilt für eine Plattenschiefstellung θ_x:

$$\sigma_{zM} = \frac{-\theta_x E a_y}{h} \qquad \sigma^*_{zA} = \frac{\theta_x El}{2h} \sin\alpha \qquad \sigma^*_{zE} = \frac{-\theta_x El}{2h} \sin\alpha$$

Sollen nun Linienlasten angegeben werden, die in der betrachteten Wandscheibe genau diese Spannungen hervorrufen, so gilt mit der Wandscheibenbreite b im allgemeinen Fall für die mittlere Lastordinate

$$q_{zM} = \left(\theta_y a_x - \theta_x a_y \right) \frac{Eb}{h}$$

sowie für die Abweichungen vom Mittelwert

$q^*_{zA} = \left(\theta_x \sin\alpha - \theta_y \cos\alpha \right) \frac{Elb}{2h}$ am Wandscheibenanfang und

$q^*_{zE} = -q^*_{zA}$ am Wandscheibenende.

Mit

$$\frac{Eb}{h} = \frac{EA}{hl} \quad \text{und} \quad \frac{Elb}{2h} = \frac{6EI}{hl^2}$$

ist also insgesamt eine linear veränderliche Linienlast anzusetzen, deren Ordinaten am Wandscheibenanfang mit

$$q_{zA} = \left(\theta_y a_x - \theta_x a_y\right)\frac{EA}{hl} + \left(\theta_x \sin\alpha - \theta_y \cos\alpha\right)\frac{6EI}{hl^2} \qquad (32)$$

und am Wandscheibenende mit

$$q_{zE} = \left(\theta_y a_x - \theta_x a_y\right)\frac{EA}{hl} - \left(\theta_x \sin\alpha - \theta_y \cos\alpha\right)\frac{6EI}{hl^2} \qquad (33)$$

gegeben sind. q_{zA} und q_{zE} sind positiv, wenn sie von oben nach unten wirkend in der Scheibe Druckspannungen erzeugen.

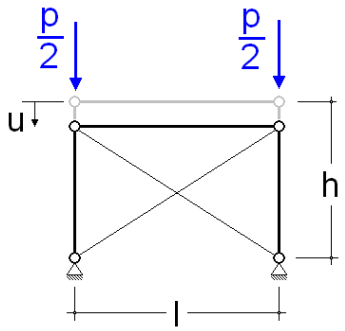
2.2.5 Besonderheiten

2.2.5.1 Stahlbauverbände

In den vorangegangenen Herleitungen ist $I = l^3 b/12$ das Trägheitsmoment und $A = lb$ die Fläche der Wandscheibe im Grundriss. Diese Werte können bei Stahlbauverbänden nicht direkt übernommen werden. Es muss vielmehr eine mechanische Entsprechung gefunden werden.

Der Ausdruck $P = \frac{EA}{h}u$

gibt die resultierende vertikale Kraft *P* infolge einer mittleren Verschiebung *u* in der Wandscheibe an.



Es ist also zu untersuchen, wie sich ein Stahlbauverband infolge der nebenstehend dargestellten Belastung verformt. Es ergibt sich unter Vernachlässigung der Diagonalstäbe

$$u = \int_{Stiel} \overline{N}\frac{N}{EA_S}dx = \frac{Ph}{2EA_S} \quad \text{mit } A_s = \text{Stielquerschnittsfläche}$$

Und daraus

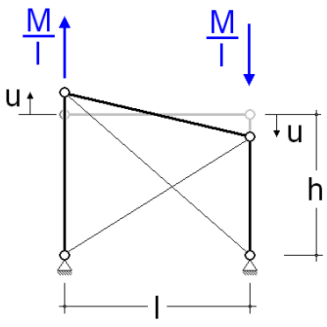
$$P = \frac{2EA_S}{h}u$$

Der Vergleich mit der o. a. zugeordneten Formel der Wandscheibe zeigt, dass beim Stahlbauverband die Querschnittsfläche A durch die Summe der Querschnittsflächen der Stiele zu ersetzen ist.

$$\boxed{A \leftarrow 2A_S}$$

Der Ausdruck $M = \frac{EI}{h}\theta$

gibt das resultierende Moment *M* infolge einer Verdrehung θ am oberen Rand der Wandscheibe an.



Wird auf den Stahlbauverband wie nebenstehend dargestellt ein Kräftepaar aufgebracht, das das Moment *M* erzeugt, so ergibt sich

$$u = \frac{Mh}{lEA_S} \quad \text{und somit} \quad \theta = \frac{2u}{l} = \frac{2Mh}{l^2 EA_S}.$$

Nach M aufgelöst

$$M = \frac{EA_S l^2}{2h}\theta$$

und mit der Ausgangsformel für Wandscheiben verglichen, zeigt sich, dass das Trägheitsmoment I beim Stahlbauverband durch das Produkt aus Querschnittsfläche eines Stiels mit der Hälfte des Quadrates der Länge l zu ersetzen ist.

$$\boxed{I \leftarrow A_S \frac{l^2}{2}}$$

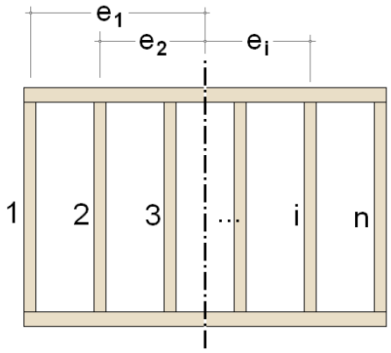
Man erkennt, dass das so definierte Trägheitsmoment dem Steiner'schen Anteil der Stützenquerschnitte bezogen auf ihren gemeinsamen Querschnitt entspricht.

2.2.5.2 Holztafeln

Bei Holztafeln wird in der Regel davon ausgegangen, dass vertikale Lasten allein von den vertikal angeordneten Rippen aufgenommen werden. In Analogie zum vorangegangenen Absatz ergibt sich verallgemeinert für Holztafeln

$$\boxed{A \leftarrow \sum_n A_{Ri}} \quad \text{und} \quad \boxed{I \leftarrow \sum_n e_i^2 A_{Ri}}$$

Hierin ist A_{Ri} die Querschnittsfläche der *i*–ten Rippe und e_i der Abstand der *i* –ten Rippe vom gemeinsamen Rippenschwerpunkt wie nebenstehend dargestellt.



2.2.5.3 Pendelstützen

Bei Hochhäusern ist es aus praktischen und architektonischen Erwägungen oftmals üblich, die Wandscheiben im Inneren des Gebäudes anzuordnen und am Rand der Platte Stützen vorzusehen – etwa um große Fensterfronten zu ermöglichen. Diese Stützen werden im Rahmen dieser Arbeit als reine Pendelstützen betrachtet und können somit ein Moment weder aufnehmen noch weiterleiten. Sie gänzlich zu vernachlässigen würde das Ergebnis jedoch stark verfälschen, da sie trotz relativ kleiner Querschnittsfläche *A* durch den meist großen Abstand *a* zum Gesamtschwerpunkt einen nicht unerheblichen Steiner'schen Anteil Aa^2 haben. Dies ist bereits bei der Ermittlung des Schwerpunktes in *(24)* und *(27)* zu berücksichtigen. Es ergibt sich

$$x_s = \frac{\sum_i^{Wände} E_i A_i x_i + \sum_j^{Stützen} E_j A_j x_j}{\sum_i^{Wände} E_i A_i + \sum_j^{Stützen} E_j A_j} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{\sum_i^{Wände} E_i A_i y_i + \sum_j^{Stützen} E_j A_j y_j}{\sum_i^{Wände} E_i A_i + \sum_j^{Stützen} E_j A_j}$$

In die Formel zur Berechnung der Schiefstellungswinkel gehen die Pendelstützen ebenfalls ein. Nachfolgend seien die Gleichungen exemplarisch für das Moment M_x dargestellt. Sie ergänzen die Gleichungen *(28)* und *(29)* um die blau dargestellten Anteile.

$$\theta_y = \theta_x \frac{\sum_{i}^{Wände} E_i I_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i}{\sum_{i}^{Wände} E_i \left(I_i \cos^2\alpha_i + A_i a_{xi}^2\right) + \sum_{j}^{Stützen} E_j A_j a_{xj}^2}$$

$$\theta_x = \frac{-h}{\sum_{(i)}^{Wände} E_i \left(I_i \sin^2\alpha_i + A_i a_{yi}^2\right) + \sum_{j}^{Stützen} E_j A_j a_{yj}^2 + \frac{\sum_{(i)}^{Wände} \left(E_i I_i \cos\alpha \sin\alpha\right)^2}{\sum_{(i)}^{Wände} E_i \left(I_i \cos^2\alpha + A_i a_{xi}^2\right) + \sum_{j}^{Stützen} E_j A_j a_{xj}^2}} M_x$$

Mit den so berechneten Plattendrehwinkeln lassen sich die Normalkräfte in den Pendelstützen direkt angeben

$$N = \left(\theta_x a_y - \theta_y a_x\right) \frac{EA}{h}$$

2.3 Aufteilung der Vertikalkräfte

2.3.1 starre Platte

Wird die starre Platte um u_z in vertikaler z-Richtung verschoben, so treten in den Wandscheiben Normalkräfte auf.

$$N_i = \frac{E_i A_i}{h} u_z$$

Die Summe aller derart geweckten Wandkräfte lautet

$$V_z = \sum_i N_i = \sum_i \frac{E_i A_i}{h} u_z$$

Die Verformung infolge einer äußeren Kraft V_z, die im Schwerpunkt (x_s, y_s) angreift, lautet folglich:

$$u_z = \frac{h}{\sum_i E_i A_i} V_z$$

Da die Resultierende einer beliebigen Vertikallast in der Regel nicht im Schwerpunkt des darunter befindlichen Scheibensystems wirkt, wird im Allgemeinen ein Versatzmoment zu berücksichtigen sein. Greift die Resultierende in einem beliebigen Punkt (x_0, y_0) an, so lauten die Versatzmomente

$$M_y^0 = -V_z \left(x_0 - x_s\right)$$
$$M_x^0 = \ V_z \left(y_0 - y_s\right)$$

Hiermit lassen sich unter Zuhilfenahme von (28) bis (31) die zusätzlich zur Vertikalverschiebung u_z sich einstellenden Plattenschiefstellungen θ_x^0 und θ_y^0 berechnen.

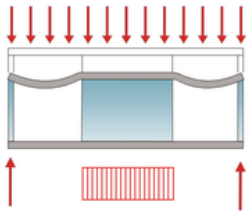
Die Lastordinaten lauten sodann

$$q_{zA} = \left(u_z + \theta_y^0 a_x - \theta_x^0 a_y\right)\frac{EA}{hl} + \left(\theta_x^0 \sin\alpha - \theta_y^0 \cos\alpha\right)\frac{6EI}{hl^2} \qquad (34)$$

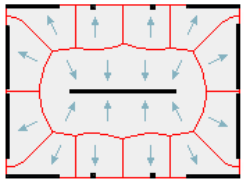
und am Wandscheibenende mit

$$q_{zE} = \left(u_z + \theta_y^0 a_x - \theta_x^0 a_y\right)\frac{EA}{hl} - \left(\theta_x^0 \sin\alpha - \theta_y^0 \cos\alpha\right)\frac{6EI}{hl^2} \qquad (35)$$

2.3.2 biegeschlaffe Platte



Die im vorangegangenen Absatz vorgestellten Formeln können verwendet werden, wenn die Biegesteifigkeit der Kopfplatte sehr viel größer ist, als die Dehnsteifigkeit der stützenden Wandscheiben. In der Regel ist das Gegenteil der Fall.



Wird die Kopfplatte als ideal biegeschlaff angenommen, so darf davon ausgegangen werden, dass die Biegemomente über den Abstützungen keinen korrigierenden Einfluss auf die Lastverteilung der Wände und Stützen haben. In diesem Fall können die Lasten mit Hilfe von Einflussflächen - wie nebenstehend beispielhaft dargestellt – ermittelt werden. Es handelt sich hierbei um eine früher häufig gebräuchliche Methode der Lastverteilung, die auch unter dem Begriff Walmdach-Analogie bekannt ist.

Programmierbare allgemeingültige Algorithmen lassen sich hierfür leicht finden.

2.3.3 elastische Platte

Diese Arbeit befasst sich mit den Wänden und Stützen eines Geschosses und deren Belastungen. Schnittgrößenverläufe in der Deckenplatte werden hier nicht betrachtet. Nichtsdestotrotz muss die Decke berechnet und bemessen werden. Hierfür werden zunehmend Finite-Element-Programme verwendet, die u. a. die Verformungen, Schnittgrößen und Lagerreaktionen auf der Grundlage einer elastischen Berechnung liefern.

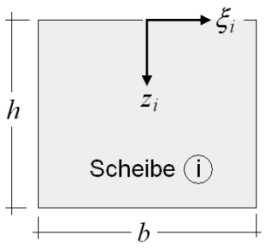
Wird im Rahmen einer linearen FE-Berechnung ein Einheitslastfall untersucht, so können die sich hieraus ergebenden Ergebnisse der Lagerreaktionen direkt an ein weiterverarbeitendes Programm übergeben werden. Dieses kann die Lasten durch Superposition auf reale Größenordnungen bringen und mit den restlichen Lastfällen normengerecht überlagern.

3 Matrizenverfahren

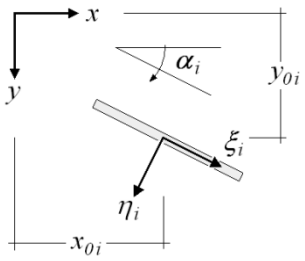
3.1 Herleitung

Die bisherigen Ausführungen stellten Formelbeziehungen dar, die einer Handrechnung zugänglich sind. Hierbei wird man die erforderlichen Summierungen der in den Formeln vorkommenden Terme vorzugsweise in Tabellenform durchführen. Nachfolgend wird ein allgemeineres Verfahren vorgestellt, das insbesondere für die Erstellung von Programmen geeignet ist.

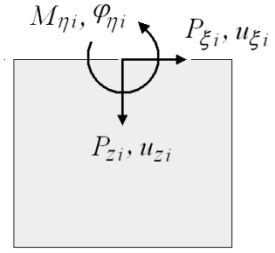
Betrachtet seien hierzu die folgenden Skizzen.



Geometrie und lokales Koordinatensystem



Einbettung der Scheibe im Gesamtsystem



lokale Schnittgrößen und Verformungen

In der linken Abbildung ist die Geometrie der Scheibe und ihr am oberen Rand in Scheibenmitte angeheftetes lokales Koordinatensystem $\xi - \eta - z$ dargestellt. Die mittlere Abbildung zeigt die Einbettung der Scheibe in das globale Gesamtsystem $x - y - z$. Die Beziehung zwischen den lokalen und den globalen Koordinaten lautet

$$\begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_{0i} \\ y - y_{0i} \end{bmatrix}$$

In der rechten Abbildung sind die lokalen Schnittgrößen $P_{\xi i}, P_{zi}, M_{\eta i}$ und Verformungen $u_{\xi i}, u_{zi}, \varphi_{\eta i}$ dargestellt. Zwischen den lokalen Schnittgrößen und Verformungen besteht die Steifigkeitsbeziehung

$$\vec{f}_i = \underline{C}_i \, \vec{u}_i \qquad \text{mit} \qquad \vec{f}_i = \begin{bmatrix} P_{\xi i} \\ P_{zi} \\ M_{\eta i} \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{u}_i = \begin{bmatrix} u_{\xi i} \\ u_{zi} \\ \varphi_{\eta i} \end{bmatrix}$$

Die lokale Steifigkeitsmatrix $\underline{C}_i$ wird in Anlehnung an die Absätze 2 bis 4 zunächst wie folgt gewählt:

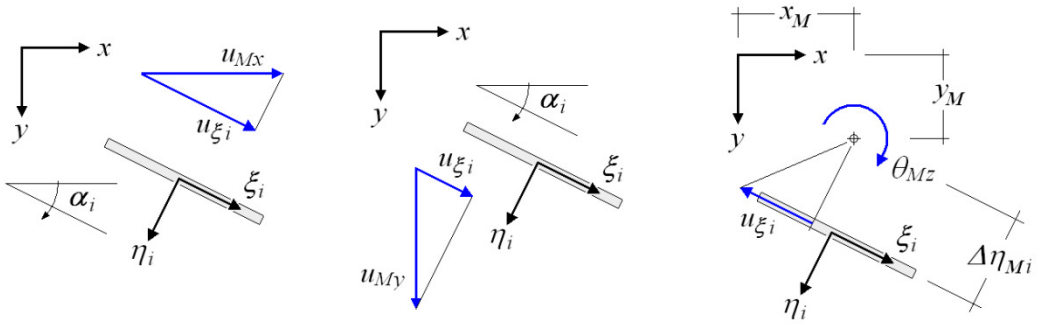
$$\underline{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{E_i A_i}{h} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{E_i I_i}{h} \end{bmatrix} \qquad (36)$$

C_i ist hierin die unter Absatz 2.1.4 festgelegte Federkonstante.

Gesucht wird nun eine Beziehung zwischen dem lokalen Verformungsvektor $\vec{u}_i$ und den globalen Verformungen der Platte, die durch den globalen Verformungsvektor

$$\vec{U}^T = \left[u_{Mx} \quad u_{My} \quad u_{Sz} \quad \theta_{Sx} \quad \theta_{Sy} \quad \theta_{Mz} \right]$$

gegeben sind. Der hier zusätzlich vergebene Index M bzw. S weist darauf hin, dass sich die zugeordnete Verformungsgröße auf den Schubmittelpunkt (M) bzw. auf den Schwerpunkt (S) bezieht.



Der o. a. Abbildung kann (von links nach rechts) entnommen werden, dass

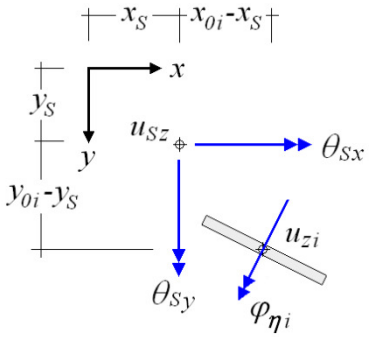
$$u_{\xi i} = \cos\alpha_i \; u_{Mx} + \sin\alpha_i u_{My} - \Delta\eta_{Mi}\theta_{Mz}$$

ist, wobei

$$\Delta\eta_{Mi} = \left(y_{0i} - y_M\right)\cos\alpha_i - \left(x_{0i} - x_M\right)\sin\alpha_i$$

ist. Des Weiteren gilt (siehe nebenstehende Skizze)

$$u_{zi} = u_{Sz} + \Delta y_{Si}\theta_{Sx} - \Delta x_{Si}\theta_{Sy}$$
$$\varphi_{\eta i} = \cos\theta_{Sy} - \sin\theta_{Sx}$$



Hierin ist $\Delta y_{Si} = y_{0i} - y_S$ und $\Delta x_{Si} = x_{0i} - x_S$

Somit ist

$$\vec{u_i} = \underline{T}_i \vec{U} \qquad \text{mit} \qquad (37)$$

$$\underline{T}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 & 0 & 0 & -\Delta\eta_{Mi} \\ 0 & 0 & 1 & \Delta y_{Si} & -\Delta x_{Si} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \end{bmatrix}$$

Die lokalen Kräfte können hierdurch direkt in Abhängigkeit der globalen Plattenverformungen angegeben werden:

$$\vec{f_i} = \underline{C}_i \vec{u}_i = \underline{C}_i \underline{T}_i \vec{U} \qquad (38)$$

Die Matrix $\underline{T}_i$ stellt nicht nur eine Beziehung zwischen den lokalen und globalen Verformungen, sondern ebenfalls zwischen den lokalen und globalen (auf der starren Platte im Schubmittelpunkt bzw. Schwerpunkt angreifenden resultierenden äußeren) Kräften her. Letztere sind gegeben durch den Vektor

$$\vec{F}^T = \left[P_{Mx} \quad P_{My} \quad P_{Sz} \quad M_{Sx} \quad M_{Sy} \quad M_{Mz} \right]$$

Die lokalen Kräfte aller Wandscheiben müssen mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht stehen

$$\sum_i \underline{T}_i^T \vec{f}_i = \vec{F}$$

Daraus folgt unmittelbar die Bedingung

$$\left(\sum_i \underline{T}_i^T \underline{C}_i \underline{T}_i \right) \vec{U} = \vec{F} \qquad (39)$$

bzw. $\underline{S}\,\vec{U} = \vec{F}$ mit $\underline{S} = \sum_i \underline{T}_i^T \underline{C}_i \underline{T}_i$

Die Matrix $\underline{S}$ stellt eine Beziehung zwischen den Verformungen der starren Platte und den äußeren Kräften dar. Sie ist symmetrisch, regulär und positiv definit unter der Voraussetzung, dass mindestens drei Wandscheiben angeordnet werden, deren Systemlinien sich in mindestens zwei unterschiedlichen, endlichen Punkten schneiden. Sie enthält ausschließlich elastische (aus $\underline{C}_i$) und geometrische (aus $\underline{T}_i$) Systemkennwerte aus den die Platte stützenden Scheiben.

Sind die äußeren Lasten vorgegeben, so können die Verformungen der starren Platte mit

$$\vec{U} = \underline{S}^{-1} \vec{F} \qquad (40)$$

berechnet werden. Die Inverse der Matrix $\underline{S}$ enthält folglich spaltenweise die Verformungen der Platte infolge einer Einheitsbelastung in Richtung der zugeordneten Zeile. Es ergibt sich

$$\underline{S}^{-1} = \begin{bmatrix} u_{Mx}(P_{Mx}=1) & u_{Mx}(P_{My}=1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{My}(P_{Mx}=1) & u_{My}(P_{My}=1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{Sz}(P_{Sz}=1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{Sx}(M_{Sx}=1) & \theta_{Sx}(M_{Sy}=1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{Sy}(M_{Sx}=1) & \theta_{Sy}(M_{Sy}=1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{Mz}(M_{Mz}=1) \end{bmatrix}$$

Das Resultat ist identisch mit den unter den Absätzen 2 bis 4 hergeleiteten Ergebnissen.

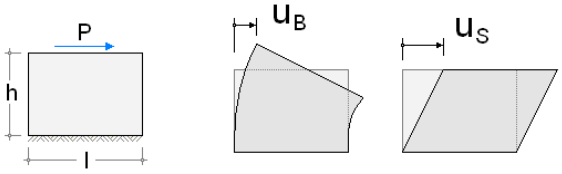
Ist $\vec{U}$ bekannt, so können auch die lokalen Kraftvektoren $\vec{f}_i$ der einzelnen Wandscheiben mit (38) berechnet werden. Die für den Nachweis bzw. die Bemessung wesentlichen Lastordinaten ergeben sich durch die Beziehung

$$\begin{bmatrix} H \\ q_{zA} \\ q_{zE} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l_i & 6/l_i^2 \\ 0 & 1/l_i & -6/l_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\xi i} \\ P_{zi} \\ M_{\eta i} \end{bmatrix} \qquad (41)$$

3.2 Berücksichtigung der Wölbnormalkraft

Unter Absatz 3.1 stellt die Matrix $\underline{C}_i$ eine entkoppelte Beziehung zwischen den lokalen Kräften und Verformungen dar. So hat eine Kraft $P_{\xi i}$ zwar eine Verformung $u_{\xi i}$ zur Folge, alle anderen lokalen Verformungen bleiben hiervon jedoch unberührt.

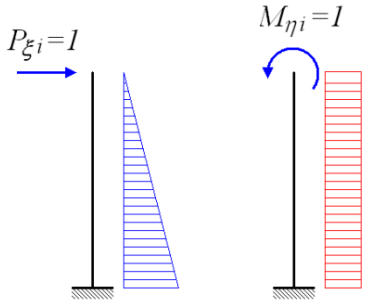
Unter Absatz 2.1.1 wurde die horizontale Verformung einer Wandscheibe infolge einer Horizontalkraft mit Hilfe stabtheoretischer Betrachtungen abgeschätzt.



Es ergab sich $u_B = \dfrac{Ph^3}{3EI}$ und $u_S = \dfrac{Ph}{GA}$

Die o. a. Skizze zeigt an, dass der Biegeanteil auch eine Verdrehung der Scheibenoberkante $\varphi_{\eta i}$ zur Folge hat. Diese lässt sich aus stabtheoretischer Sicht ebenfalls mit Hilfe der Arbeitsintegrale abschätzen.

$$\varphi_{\eta i}(P_{\xi i}) = \frac{1}{EI}\int M(P_{\xi i})\overline{M}(\overline{M}_{\eta i})dx = -\frac{h^2}{2EI}$$



Nach Maxwell und Betti ist ebenfalls

$$u_{\xi i}(M_{\eta i}) = \varphi_{\eta i}(P_{\xi i})$$

so dass eine symmetrische Nachgiebigkeitsmatrix aufgestellt werden kann, die die lokalen Verformungen der Wandscheibe mit den lokalen Kräften in Verbindung stellt

$$\vec{u}_i = \underline{N}_i\,\vec{f}_i \qquad \text{mit} \qquad \underline{N}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{h^3}{3EI_i} + \dfrac{h}{GA_i} & 0 & \dfrac{-h^2}{2EI_i} \\ 0 & \dfrac{h}{EA_i} & 0 \\ \dfrac{-h^2}{2EI_i} & 0 & \dfrac{h}{EI_i} \end{bmatrix} \qquad (42)$$

Wird nun

$$\underline{C}_i = \underline{N}_i^{-1} \qquad (43)$$

gesetzt, so erhält man eine nicht mehr entkoppelte Beziehung zwischen den lokalen Kraftgrößen $[P_{\xi i}, M_{\eta i}]$ und den lokalen Verformungen $[u_{\xi i}, \varphi_{\eta i}]$. Die Inverse der so veränderten Matrix $\underline{S}$ lautet nun

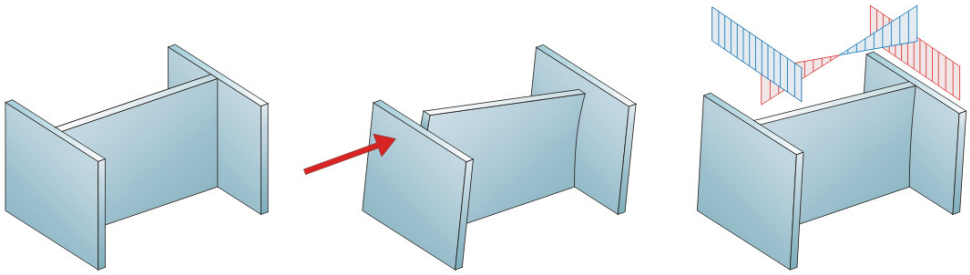
$$\underline{S}^{-1} = \begin{bmatrix} u_{Mx}(P_{Mx}=1) & u_{Mx}(P_{My}=1) & 0 & u_{Mx}(M_{Sx}=1) & u_{Mx}(M_{Sy}=1) & u_{Mx}(M_{Mz}=1) \\ u_{My}(P_{Mx}=1) & u_{My}(P_{My}=1) & 0 & u_{My}(M_{Sx}=1) & u_{My}(M_{Sy}=1) & u_{My}(M_{Mz}=1) \\ 0 & 0 & u_{Sz}(P_{Sz}=1) & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{Sx}(P_{Mx}=1) & \theta_{Sx}(P_{My}=1) & 0 & \theta_{Sx}(M_{Sx}=1) & \theta_{Sx}(M_{Sy}=1) & 0 \\ \theta_{Sy}(P_{Mx}=1) & \theta_{Sy}(P_{My}=1) & 0 & \theta_{Sy}(M_{Sx}=1) & \theta_{Sy}(M_{Sy}=1) & 0 \\ \theta_{Mz}(P_{Mx}=1) & \theta_{Mz}(P_{My}=1) & 0 & 0 & 0 & \theta_{Mz}(M_{Mz}=1) \end{bmatrix}$$

Die hier blau eingefärbten globalen Plattenverformungen sind im allgemeinen Fall von Null verschieden. Sie zeigen an, dass sich die starre Platte infolge eines Momentes horizontal verschieben - und infolge einer Horizontalkraft um horizontale Achsen verdrehen kann.

Auswirkungen

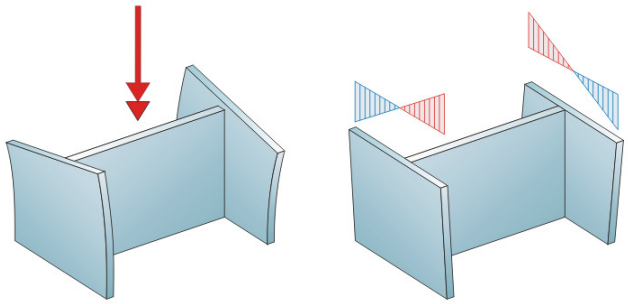
Betrachtet sei eine Gruppe von Scheiben wie unten dargestellt. Sie bilden gemeinsam die Figur eines Doppel-T-Trägers, sind jedoch nicht kraftschlüssig miteinander verbunden (Abb. links).

Die auf der (starren) Kopfplatte wirkende Horizontalkraft Hx bewirkt, dass die Flansche keine Kräfte aufnehmen, da sie senkrecht zur Kraftrichtung angeordnet sind. Sie kippen widerstandslos um ihren Fußpunkt. Die den Steg bildende Wandscheibe wird allein die volle Kraft in der Größe Hx aufnehmen müssen und reagiert durch eine entsprechende Verformung (vgl. Abb. Mitte).



Besteht nun ein monolithischer Kraftschluss zwischen den Wandscheiben und dem als relativ starr angesehenen Überbau, so wird sich die Kopfplatte insbesondere gegen eine vertikale Verformung wehren. Sie wird die Scheiben entsprechend drücken bzw. ziehen um die Oberkanten der Scheiben auf ein (leicht gekipptes) ebenes Niveau zu bringen. Hierdurch werden senkrecht wirkende Kräfte in die Scheiben eingetragen (vgl. Abb. rechts - blau=Zug, rot=Druck). Diese Kräfte bilden stets eine Gleichgewichtsgruppe deren Größenordnung jedoch nicht unterschätzt werden darf. Sie folgen aus der Verwölbung der Scheibenoberkanten zueinander und werden deshalb Wölbkräfte genannt.

Entsprechendes gilt für eine Belastung der Kopfplatte durch ein Moment Mz. Hierbei werden die Flansche durch gegensätzlich gerichtete Horizontalkräfte belastet, die über ihren Hebelarm mit dem äußeren Moment im Gleichgewicht stehen. Eine entsprechende Verformung (Abb. links) wird von der starren Kopfplatte unterbunden, was zu den vertikal eingetragenen Kräften führt (Abb. rechts). Erkennbar ist hier die Analogie zur Wölbtorsionsspannung dünnwandiger Querschnitte.

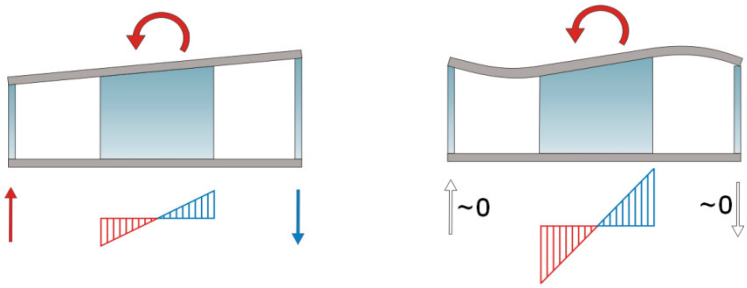


Ob sich der Effekt bei realen Bauwerken tatsächlich mit bemessungstechnischer Relevanz einstellt, ist abhängig von der Steifigkeit der Deckenplatte und des Überbaues. In der Realität wird es stets zu einem Kompromiss zwischen elastischem Nachgeben und dem Aufbau von Widerständen kommen. Wenn dieses Verhalten prozentual abgeschätzt werden kann, kann der Wert außerhalb der Hauptdia-

gonalen in der Nachgiebigkeitsmatrix $\underline{N}_i$ (siehe *(42)*) zur Dämpfung der Wölbkräfte entsprechend abgemindert werden.

4 Anmerkungen

Die Aufnahme und Weiterleitung der Horizontalkräfte in die darunterliegenden Wände ruft auch in der Platte Spannungen hervor. Eine Bemessung der Platte hierfür ist deshalb erforderlich. Ansonsten ist die Annahme der Dehnstarrheit in der Literatur unstrittig. Bei der Berechnung der Biegemomente in adäquate Wand- bzw. Stützenlasten wurde auch die Biegestarrheit der Platte zugrunde gelegt. Ob diese Annahme gerechtfertigt ist, muss im Einzelfalle abgeschätzt werden. Zur Erläuterung der Problematik sei das nachfolgend abgebildete System betrachtet.

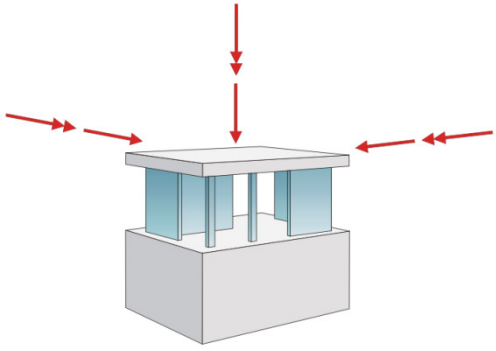


Erfährt die Kopfplatte ein Moment, so wird sich die Platte wie dargestellt verdrehen. Wird die Kopfplatte gemeinsam mit dem Überbau als ideal starr angesehen, so stellt sich eine reine Festkörperverformung ein: Die Platte bleibt auch im verformten Zustand eben. Dies bewirkt, dass exzentrisch zum elastischen Schwerpunkt der Scheiben liegende Wände (und Stützen) gedrückt oder gezogen werden und entsprechend mit Normalkräften reagieren. Diese Normalkräfte, wie auch die verteilten Streckenlasten in der mittleren Scheibe (siehe Abb. links) stehen im Gleichgewicht mit dem äußeren Moment. Die Kräfte in den äußeren Wänden und Stützen haben hierbei i. d. R. einen nicht unmaßgeblichen Anteil.

Wird die Kopfplatte mitsamt dem Überbau als ideal biegeschlaff angesehen, so wird sich die Platte entsprechend nachgiebig verformen (Abb. rechts). Ein Zusammenpressen bzw. Strecken der exzentrisch liegenden Wände und Stützen bleibt aus. Es werden keine maßgeblichen Vertikalkräfte eingetragen. Da trotzdem Gleichgewicht mit dem äußeren Moment gewährleistet sein muss, erhöhen sich die Ordinaten der verteilten Streckenlasten in den senkrecht zur Momentenachse ausgerichteten Scheiben. Betrachtet man die offensichtliche Analogie zwischen den hier diskutierten Scheiben und Stützen mit der Theorie zur Berechnung von Trägheitsmomenten gegebener Querschnitte, so ergibt sich durch Aufgabe der Annahme vom Ebenbleiben des Querschnitts eine Reduzierung des Steineranteils: Die Einzelteile des Querschnitts tragen unabhängig voneinander nur noch über ihr Eigenträgheitsmoment.

Beim Tabellenverfahren kann eine ideal biegeschlaffe Platte simuliert werden, indem in den unter Absatz 2.2 vorgestellten Formeln alle Therme mit dem Ausdruck $A_i a^2_{xi}$ bzw. $A_i a^2_{yi}$ zu Null gesetzt werden. Derselbe Effekt wird beim Matrizenverfahren erzielt, wenn in der Matrix $\underline{T}_i$ die Werte für Δy_{Si} und Δx_{Si} zu Null gesetzt werden.

Da die Natur im freien Spiel der Kräfte zu Kompromissen neigt, wird sich stets ein Zwischenzustand einstellen. Eine prozentuale Abschätzung des Tragverhaltens zwischen ideal biegestarrer und ideal biegeschlaffer Platte ermöglicht es, die Ergebnisse entsprechend gewichtet zu mitteln.



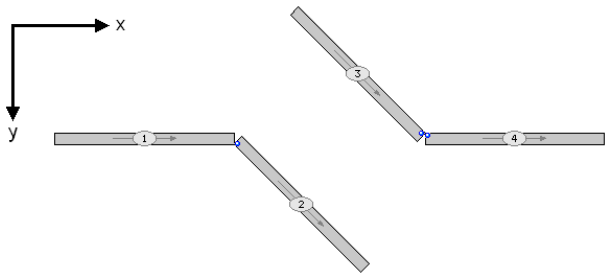
Das vorliegende Problem kann als reines Verteilungsproblem angesehen werden. Die Frage ist: Wie verteilen

sich die äußeren, auf der Kopfplatte angesetzten Kräfte auf die definierten Scheiben und Stützen? Festzustellen ist: Alle hier vorgestellten Modelle (und dies gilt auch für die Wölbnormalkräfte) stehen mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht. Hierdurch ist gewährleistet, dass auch prozentual gewichtete Einflüsse unterschiedlicher Modelle stets einen Gleichgewichtszustand bilden. Die Möglichkeit, prozentuale Wichtungsfaktoren vorzugeben, versetzt den Benutzer eines EDV-Programmes in die Lage, ein möglichst dem gegebenen System angepasstes, realistisches Modell auszuwählen. Im Zweifelsfalle bietet ein EDV-Programm die hervorragende Möglichkeit, für unsicher empfundene Angaben zu variieren und die Reaktion des Systems zu studieren.

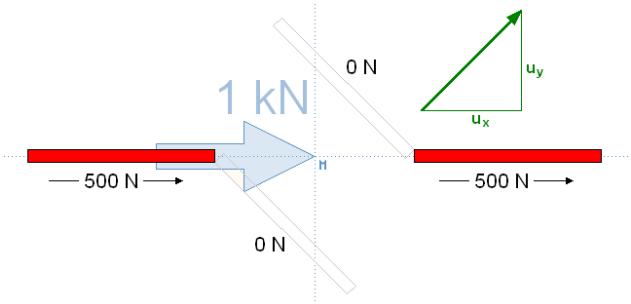
5 Beispiele

5.1 Verteilung der Horizontalkräfte bei nicht achsparallel angeordneten Wänden

Betrachtet sei das nachfolgend dargestellte Beispiel. Die vier Wände haben dieselben geometrischen Ausmaße und elastischen Eigenschaften. Die Wände 1 und 4 liegen parallel zur x-Achse auf derselben Geraden. Die Wände 2 und 3 sind wie dargestellt unter 45^0 angeordnet.

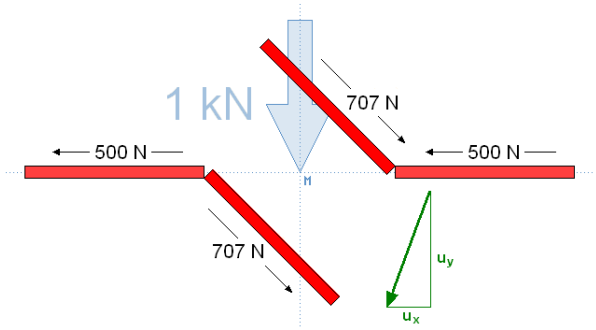


Erfährt die Deckenplatte im Schubmittelpunkt der Wandscheiben eine Horizontalkraft von 1 kN, so stellt sich die nachfolgend dargestellte Situation ein.



Die Horizontalkraft wird allein von den Wänden 1 und 4 zu gleichen Teilen aufgenommen. Hierzu verschiebt sich die Kopfplatte um ein gewisses Maß u_x in X-Richtung. Die Wände 2 und 3 bleiben spannungsfrei. Dies kann nur gelingen, wenn die Verschiebung der Kopfplatte senkrecht zu den Systemachsen der Wände 2 und 3 steht. Tatsächlich stellt sich mit $u_y = -u_x$ eine entsprechende Verformung ein (vgl. grüner Pfeil). Es herrscht Gleichgewicht in x- wie auch in y-Richtung.

Erfährt die Deckenplatte im Schubmittelpunkt der Wandscheiben eine Vertikalkraft von 1 kN, so ergibt sich die nachfolgend dargestellte Situation.

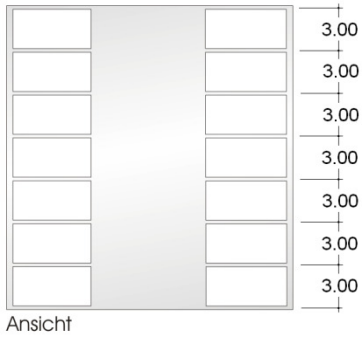


Die horizontal liegenden Wände 1 und 4 können keine vertikalen Kräfte aufnehmen. Allein die unter 45^0 angeordneten Wände müssen folglich einen Gleichgewichtszustand mit der äußeren Kraft in y-Richtung bilden. Dies ist mit 2×707×sin(45)=1000N = 1 kN sichergestellt. Die Kräfte in den Wänden 2 und 3 stellen gleichzeitig ein Ungleichgewicht von 1 kN in x-Richtung her. Dieses kann von den horizontal liegenden Wänden mit je 500 N aufgenommen werden. Hierzu muss sich die Kopfplatte um ein Maß u_x in negativer x-Richtung verschieben. Die betragsmäßige Größe von u_x entspricht der einer Horizontalbelastung von 1 kN, da hierbei ebenfalls 500 N pro Scheibe geweckt wurden.

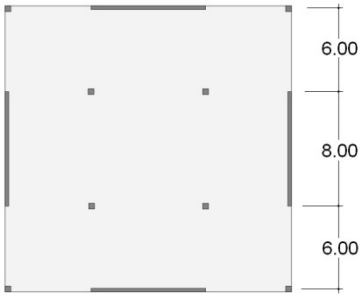
5.2 Verteilung der Vertikalkräfte aus einem Moment

Ein siebenstöckiges Gebäude soll untersucht werden. Von besonderem Interesse sei hierbei die Verteilung der Vertikalkräfte in den Stützen und Wänden des zweiten Stockwerks infolge eines von einer symmetrisch in der oberen Deckenplatte eingeleiteten Horizontalkraft induzierten Momentes. Die Resultierende der Horizontalkraft beträgt 2000 kN. Es ergibt sich folglich in Höhe der Oberkante der zu untersuchenden Scheiben und Stützen ein Moment von

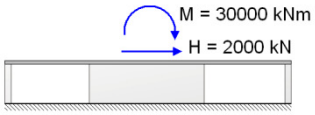
$$M = 5 \times 3.00 \times 2000 = 30000 \text{ kNm}.$$



Ansicht



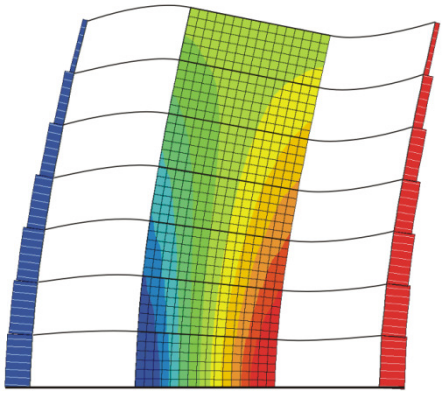
Grundriss



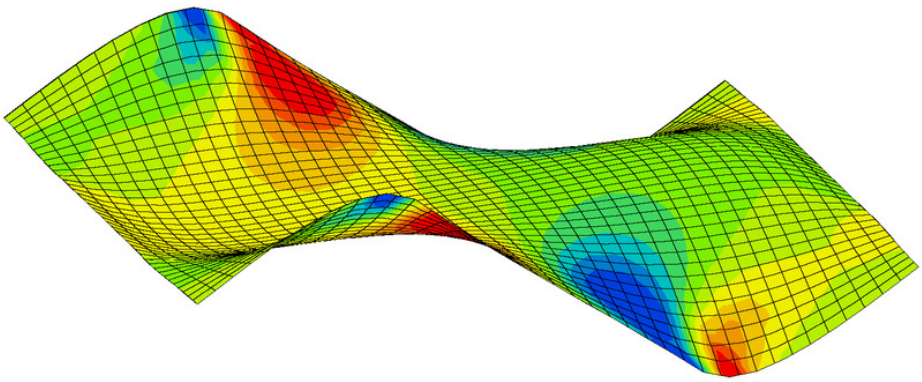
Ersatzsystem

Die Ergebnisse sollen mit Hilfe der FE-Methode verifiziert werden. Hierzu wird das System in *4H*-ALFA^{3D} [5] eingegeben und berechnet. Die Wandstärken werden mit 25 cm und die Deckendicke mit 30 cm angenommen. Der Querschnitt der Stützen beträgt 45/45 cm. Die Lagerung an der Systemunterkante wird als starr angenommen. Die Stützen werden als reine Pendelstützen ausgebildet und die Scheiben des betrachteten Geschosses sind oben und unten über ein Scharnier mit den Deckenplatten verbunden.

Zunächst seien die Verformungen des Systems betrachtet, wie sie sich aus der FEM-Berechnung ergeben.



Deformationen des Gesamtsystems (Ansicht)

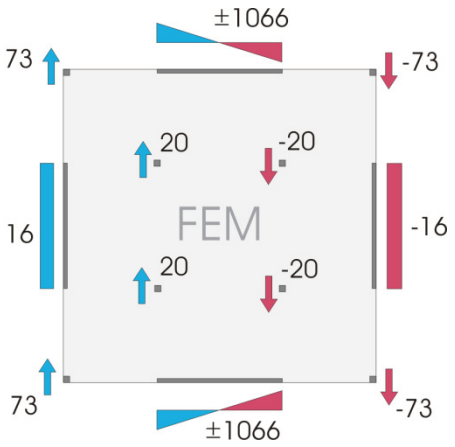


Deformationen der betrachteten Kopfplatte (dreidimensional)

Am Gesamtsystem sind die Normalspannungen der Scheibe in vertikaler Richtung sowie die Normalkräfte der Randstützen farblich dargestellt. Es ist an den Abbildungen deutlich zu erkennen, dass die Annahme der Biegestarrheit bei der Ermittlung der Wand- und Stützenbelastungen nicht aufrecht erhalten werden kann. Es soll deshalb von der unter Absatz 4 vorgestellten Möglichkeit Gebrauch gemacht werden, die Ergebnisse einer biegeschlaffen Platte mit denen der biegestarren Platte prozentual zu wichten.

Die Ergebnisse werden mit denen der FE-Berechnung verglichen. Es sind dies die Normalkräfte in den Stützen des betrachteten Geschosses sowie die mit der Scheibendicke multiplizierten vertikalen Spannungen in horizontalen Schnitten an den Scheibenoberkanten. Zu beachten ist, dass auch die Ergebnisse der FE-Berechnung mit einem methodisch begründeten
Fehler von etwa 3 – 5 % behaftet sind.

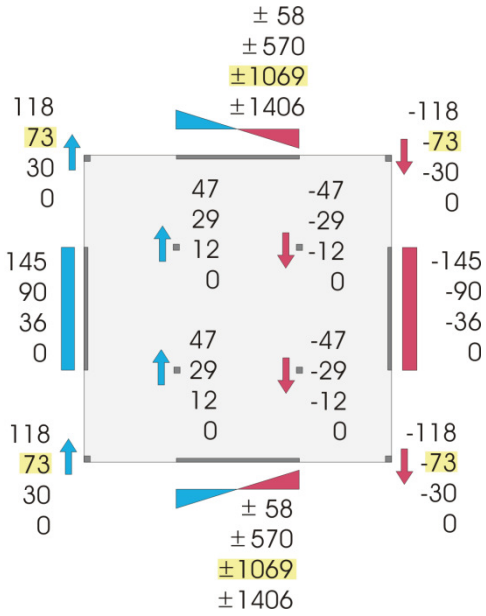
Nebenstehend sind die Ergebnisse der FE-Berechnung dargestellt. Blau gefärbte Größen weisen auf Zug – rot gefärbte Größen auf Druck hin. Die Ordinaten der Stützen sind in kN und die der Wandscheiben in kN/m angegeben.



Die beiden parallel zur Lastrichtung angeordneten Wände übernehmen mit einer Randlastordinate von 1066 kN/m ca. 80% des anstehenden Momentes. Insgesamt liefern die hier dargestellten Kräfte ein Moment von 28560 kNm, das dem äußeren Moment von 30000 kNm gegenübersteht. Die Differenz ist dem Näherungscharakter der FE-Methode geschuldet.

In der unteren Abbildung sind die Ergebnisse des hier beschriebenen Verteilungsverfahrens dargestellt. Den Wänden und Stützen sind jeweils 4 Zahlen zugeordnet. In Anlehnung an die Ausführungen unter Absatz 4 wurden unterschiedliche Wichtungen der
Plattenstarrheit untersucht

1. Zeile: 100% biegestarr - 0% biegeweich
2. Zeile: 62% biegestarr - 38% biegeweich
3. Zeile: 25% biegestarr - 75% biegeweich
4. Zeile: 0% biegestarr - 100% biegeweich



In der vierten Zeile sind allein die Ordinaten der parallel zur Lastrichtung angeordneten Wände signifikant. Da der Steiner‘sche Anteil hierbei vollständig weggelassen wurde, müssen die Wandscheiben alleine das Moment

$$M = 2 \times 1406 \times 8^2/6 = 30000 \text{ kNm}$$

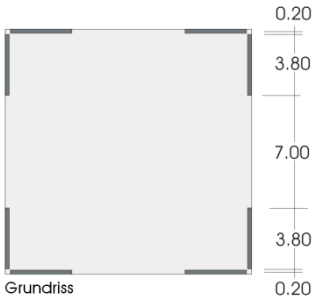
aufnehmen. Die beste Entsprechung zu den Ergebnissen der FE-Methode ist für die horizontalen Wandscheiben in der dritten Zeile (25% biegestarr) gegeben. Dieses Ergebnis ordnet jedoch den Eckstützen mit 30 kN eine zu geringe Last zu. Die Ergebnisse der Eckstützen sind in der zweiten Zeile (62% biegestarr) mit den Ergebnissen der FE-Berechnung identisch. Um auch die Ergebnisse der senkrechten Wandscheiben in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der FEM-Berechnung zu bringen, müsste die Biegestarrheit der Kopfplatte auf 14% (hier nicht weiter dargestellt) heruntergeschraubt werden. Die Übereinstimmung der Ergebnisse bei den Innenstützen liegt zwischen der zweiten und dritten Zeile (bei 43%).

Zusammenfassung:

Werden die hier dargestellten Wandscheiben sowohl mit 62% als auch mit 25% Biegestarrheit bemessen und wird das jeweilige Extremalergebnis zugrundegelegt, so liegt man stets auf der sicheren Seite, ohne wirtschaftlich allzu große Einbußen hinzunehmen.

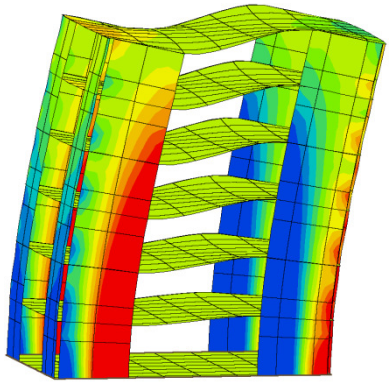
5.3 Bildung separater Kerne

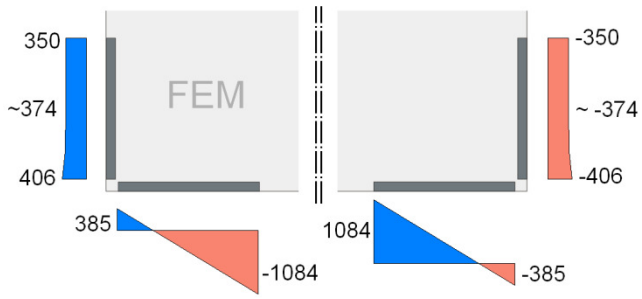
In Anlehnung an 5.2 soll ein weiteres Gebäude untersucht werden. Von besonderem Interesse sei hierbei wiederum die Verteilung der Vertikalkräfte in den Stützen und Wänden des unteren Stockwerks infolge eines von einer symmetrisch in der oberen Deckenplatte eingeleiteten Horizontalkraft induzierten Momentes. Höhenverhältnisse und Wanddicken entsprechen denen im vorangegangenen Beispiel. Es ergibt sich eine aufzunehmende Horizontalkraft von 1500 kN und ein Moment von 22500 kNm.



Die einzelnen Scheiben wurden bei der Diskretisierung bewusst mit Abstand zueinander angeordnet, so dass kein Schubverbund zwischen den Scheiben besteht. Die mit Hilfe der FE-Methode berechneten Verformungen ergeben das nebenstehend dargestellte Bild.

Die Spannungsverläufe in den horizontalen Schnitten der Scheiben im oberen Bereich des unteren Geschosses als Ergebnis der FE-Berechnung sind nachfolgend dargestellt.

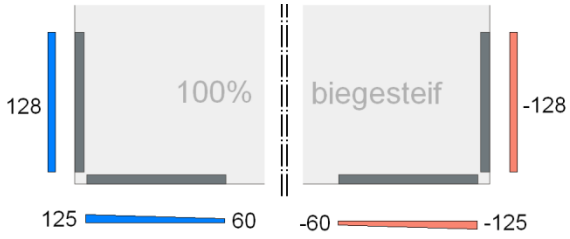




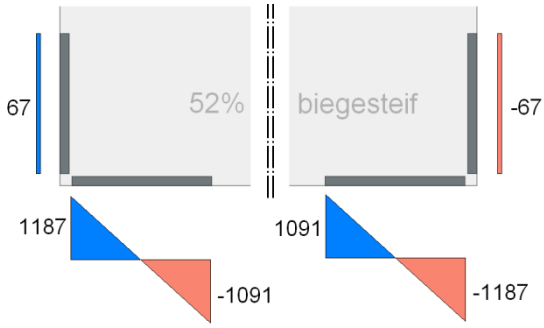
Dem stehen die entsprechenden Ergebnisse der hier vorgestellten Verteilungsmethode bei Annahme 100%-iger Biegesteifigkeit der Platte gebenüber.

Erwartungsgemäß sind die Ordinaten zu gering.

Wird die Biegesteifigkeit der Platte mit 0% angesetzt, so ergibt sich in den horizontal angeordneten Scheiben eine Randspannung von ± 2337 kN/m, die dem Gesamtmoment von 3 × 2337 × 3.802 / 6 ~ = 22500 kNm entgegenstehen. Die Spannungen in den vertikal angeordneten Scheiben ergeben sich hierbei wegen des fehlenden Steineranteils zu 0.



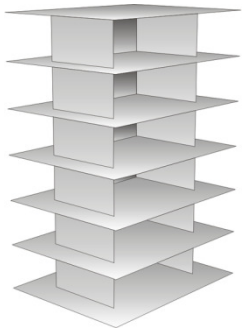
Eine Wichtung der Ergebnisse vermag zwar die Randspannungen in der horizontalen Scheibe anzuheben, eine Anpassung an den Wert 374 kN/m in der vertikal angeordneten Scheibe kann hierdurch jedoch nicht erreicht werden.

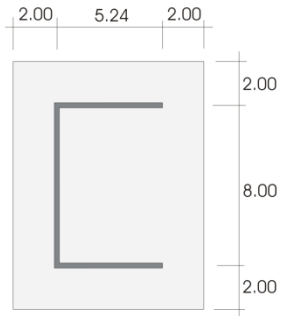


In den Ergebnissen der FE-Berechnung ist zu erkennen, dass sich hier winkelförmige Subsysteme herausbilden, die trotz des Fehlens eines kontinuierlichen Verbundes allein durch die regelmäßige Einbindung der Geschossdecken als separate Kerne zusammenarbeiten.

Ein solcher Effekt kann von der Verteilungsmethode nicht erkannt werden.

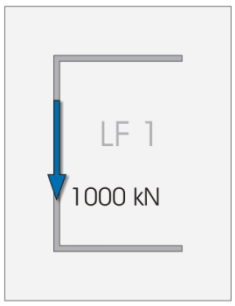
5.4 U-Profil

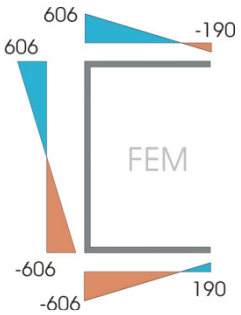


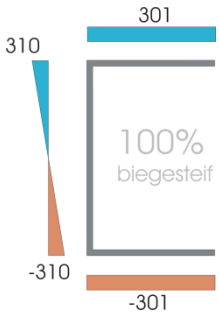


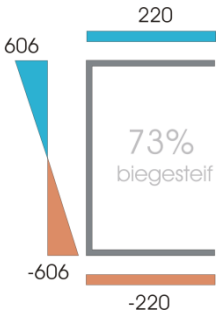
Das nebenstehend dargestellte System soll berechnet werden. Die unterstützenden Wandscheiben sind U-Profil-förmig angeordnet. Die Abstände der Geschossdecken betragen 3.00 m. Bei der FEM-Diskretisierung wurde auf Schlitze und Scharniere verzichtet. Die Wandscheiben sind folglich durchgehend kraftschlüssig miteinander verbunden. Es werden zwei Lastfälle untersucht, wobei die Lasten jeweils in der Ebene der obersten Deckenplatte wirken. Betrachtet werden die Spannungen an der Oberkante der Wandscheiben des untersten Geschosses.

Lastfall 1:

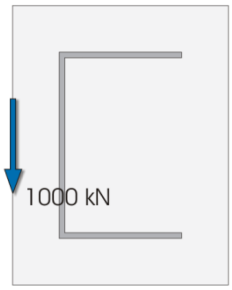






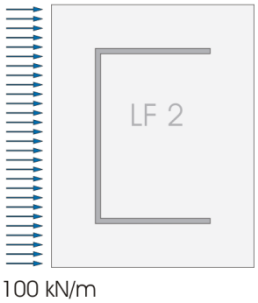


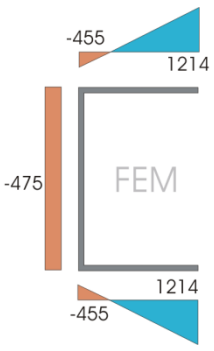
Hier sind dargestellt (von links nach rechts): Belastung der oberen Deckenplatte, FEM-Lösung, Ergebnis bei Annahme 100% Biegesteifigkeit, Ergebnis bei Annahme 73% Biegesteifigkeit. Die Last von 1000 kN liefert ein Moment von $1000 \times 5 \times 3.00 = 15000$ kNm in der betrachteten Ebene.

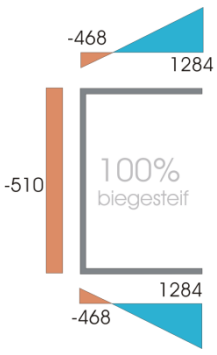


Die Finite-Element-Methode liefert in der vertikal angeordneten Scheibe eine Randlast von 606 kN/m, die bei Annahme 100%-iger Biegesteifigkeit (310 kN/m) vom Verteilungsverfahren nicht erreicht wird. Wird der Prozentsatz der Biegesteifigkeit auf 73% reduziert, sind die Ergebnisse in der vertikalen Scheibe identisch. Der linear veränderliche Verlauf der Spannungen nach FEM liegt in einer anderen Tatsache begründet: Betrachtet man die Wandscheiben ohne Kraftverbund unabhängig voneinander, so liegt der Schubmittelpunkt in der Mitte der vertikalen Wandscheibe. Der Schubmittelpunkt eines U-Profils liegt jedoch deutlich weiter links. Dies führt dazu, dass der reine Biegespannungszustand bei der FE-Methode zusätzlich von Wölbspannungen aus Torsion überlagert wird. Wird die Kraft wie nebenstehend dargestellt angeordnet, so ergeben sich in sehr guter Näherung Übereinstimmungen mit den Lösungen nach der Verteilungsmethode unter der Annahme 100%-iger Biegesteifigkeit.

Lastfall 2:



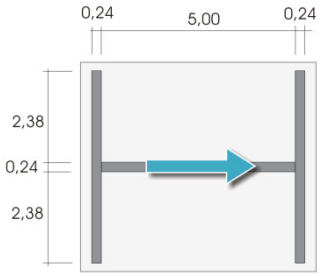




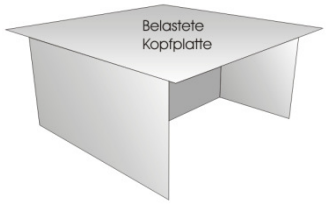
Die Ergebnisse der FE-Methode und des Verteilungsverfahrens stimmen bei Annahme 100%-iger Biegesteifigkeit bereits sehr gut überein. Die Lastordinaten des Verteilungsverfahrens sind an allen Stellen etwas größer als die der FE-Methode.

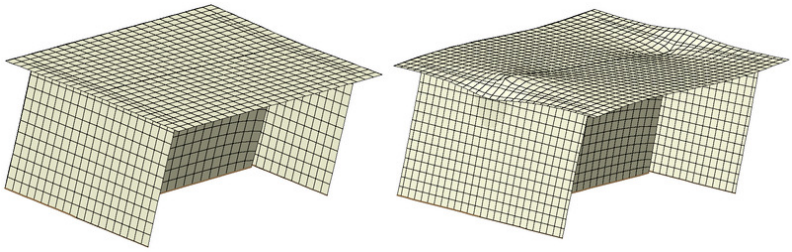
Da das Ergebnis (rechts) exakt im Gleichgewicht mit dem äußeren Moment 100 × 12.00 × 5 × 3.00 = 18000 kNm steht, sind die geringfügigen Unterschiede in dem Näherungscharakter der Finiten-Element-Methode begründet.

5.5 Wölbnormalkraft



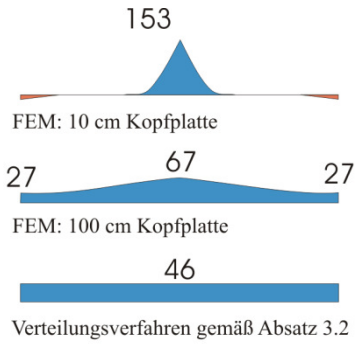
Das nebenstehend dargestellte System soll berechnet werden. Die drei Wandscheiben bilden das Profil eines Doppel-T-Querschnittes. Die horizontale Last von 1000 kN in Steglängsrichtung wird durch eine Flächenlast der Kopfplatte in die Wandscheiben eingeleitet. Die Ergebnisse des unter Absatz 3.2 hergeleiteten Verfahrens werden mit den Ergebnissen der FE-Methode verglichen. Hierbei besteht kein Kraftschluss an den Berührungspunkten der Wände. Darüber hinaus sind die Wandscheiben über ein Scharnier mit der Kopfplatte verbunden. Die FE-Berechnung wird mit einer 10 cm sowie mit einer 100 cm starken Kopfplatte durchgeführt.





Deformationen: links: 100 cm Kopfplatte, rechts: 10 cm Kopfplatte

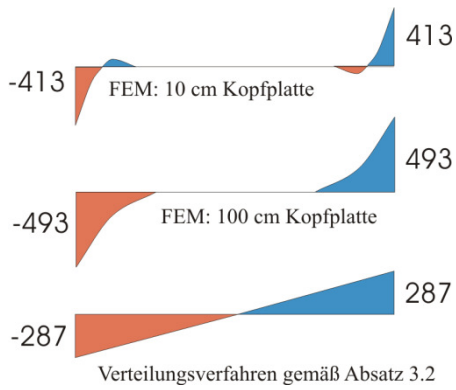
Im Verformungsbild rechts sind die Störungen infolge einer Verwölbung der Kopfplattenebene gut zu erkennen. Je steifer die Platte ist, desto mehr wird sie sich gegen eine derartige Verformung durch Einleitung von Normalspannungen in die Wandscheiben zur Wehr setzen.



Da die Last direkt in die Kopfplatte eingeleitet wurde, ist das Moment in Höhe der Wandscheibenoberkanten gleich 0. Die nachfolgend diskutierten vertikalen Normalspannungen in den Wandscheiben resultieren folglich allein aus der Verwölbungsbehinderung.

Die oberen drei Kurven stellen den Spannungsverlauf in den Flanschen, die unteren drei Kurven im Steg dar.

Die Spannungen konzentrieren sich bei weichen Platten im Bereich der Berührungspunkte von Flansch und Steg und klingen in größer werdender Entfernung schnell ab. Je steifer die Kopfplatte, desto mehr verteilen sich die Normalspannungen auf das Gesamtsystem. Mit Hilfe des Verteilungsverfahrens gemäß Absatz 3.2 kann nur ein linear veränderlicher Spannungsverlauf ermittelt werden.



Im integralen Sinne können die Ergebnisse des Verteilungsverfahrens als sehr gut angesehen werden, wenngleich die Spannungsspitzen in den Ordinaten nicht wiedergegeben werden können.

6 Abschließende Bemerkungen

Die Ermittlung der Verteilung der Horizontalkräfte auf die Wandscheiben setzte die Dehnstarrheit der Kopfplatte voraus. Diese Voraussetzung stellt keine realitätsfremde Einschränkung dar. Die Berechnungsmethode ist allgemein anerkannt und gilt gewissermaßen als „State of the Art“. Gegenüber [1] und [2] wurden die Formeln nur auf allgemeine, nicht achsparallele Wandscheiben erweitert.

Die Verteilung der Momente setzte zunächst die Biegestarrheit der Kopfplatte voraus. Wie einige Beispiele gezeigt haben, ist diese Annahme in der Baupraxis in vielen Fällen unrealistisch. Die Unterdrückung der Steiner'schen Anteile führte zum Modell „weiche Platte“. Werden die Ergebnisse des Modells „starre Platte“ mit denen der weichen Platte gewichtet, so können oftmals befriedigende Ergebnisse erzielt werden. Da der Wichtungsfaktor im Allgemeinen unbekannt ist, wird empfohlen, diesen in Grenzbereichen zu variieren.

Die Ermittlung der Aufteilung der vertikalen Kräfte auf der Grundlage der Steifigkeiten der unterstützenden Wände und Stützen gliedert sich konsequent in das Formelwerk ein. Da auch hier die Annahme der Biegestarrheit der Kopfplatte zugrunde liegt, sind die Ergebnisse in der Praxis in nahezu allen Fällen unbrauchbar. Die Ermittlung der Wandlasten aus Einflussflächen gemäß der Walmdachanalogie oder die direkte Übernahme der Auflagerreaktionen aus einer vorangegangenen Plattenberechnung für den Bemessungslauf machen keine Probleme und sind unbedingt vorzuziehen.

Beim Matrizenverfahren wurde gezeigt, dass auch Wölbkrafteinflüsse tendenziell ermittelt werden können. Die Ergebnisse mit und ohne Wölbkrafteinfluss können wiederum gewichtet angesetzt werden um der stets endlichen Nachgiebigkeit der Kopfplatte Rechnung zu tragen. Empfehlungen zum Einsatz setzen weitergehende Untersuchungen voraus.

7 Literatur

[1] Räumliche Aussteifung im Stahlbetonbau
Prof. Dr.-Ing. Rudolf Baumgart, Hochschule Darmstadt

[2] Verteilung von Kräften aus Windeinwirkung auf Wandscheiben in Holzhäusern
Prof. Dr.-Ing. Claus Wagner, Hochschule Rosenheim

[3] Zur Steifigkeit von Holztafeln
Prof. Dr.-Ing. Martin H. Kessel, TU Braunschweig

[4] 4H-HORA - Handbuch
pcae-GmbH, Hannover

[5] 4H-ALFA - Handbuch
pcae-GmbH, Hannover